MPSI

Programme de colle - semaine 10 du 04/12/2023 au 10/12/2023

1 Systèmes linéaires et inversion de matrices

- Pas de théorie mais méthodes à connaître
- Généralités : système linéaire d'équations scalaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), système homogène associé. Forme matricielle d'un système linéaire ($AX = B$).
- Résolution des systèmes : cas des systèmes triangulaires à coefficients diagonaux non nuls (une unique solution). Cas général : transformation en système échelonné par pivot de Gauss, opérations élémentaires sur les lignes, résolution d'un système échelonné : vérification de la compatibilité puis introduction d'autant de paramètres qu'il y a d'inconnues secondaires.
  Pour un système avec second membre compatible, description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé.
- Les réflexes suivants doivent être acquis :
  - Commencer par mettre un système sous forme "normalisée" (inconnues à gauche alignées verticalement, second membre à droite).
  - Échelonner le système sans effectuer d'opérations interdites (du genre $L_i \leftarrow \lambda L_i + L_j$).
  - Quand le système est triangulaire, regarder si un des coefficients diagonaux est nul.
- Étude d'inversibilité de matrice et inversion (le cas échéant) : pas de théorie, simplement savoir appliquer la méthode, à tester uniquement sur des matrices de taille 3 maximum avec des coefficients numériques.

2 Suites particulières

- Suite arithmético-géométrique. Calcul du terme général.
  Les suites arithmétiques et géométriques n'ont pas été revues mais sont bien évidemment à connaître sans hésitation.
- Suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$(E)\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{K}^2 \qquad b \neq 0.$$

  Équation caractéristique.
  Expression des solutions de (E) (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), expression des solutions à valeurs réelles (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

3 Relations binaires

Uniquement en question de cours !

- Relation d'ordre (relation réflexive, transitive, antisymétrique). Ordre partiel, total.
  Exemples : ordre usuel dans $\mathbb{R}$, inclusion dans $\mathcal{P}(E)$.
  Définition de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$. Question de cours : la divisibilité dans $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre, celle dans $\mathbb{Z}$ n'en est pas une.
- Relation d'équivalence (relation binaire réflexive, transitive, symétrique). Congruences dans $\mathbb{Z}$. Question de cours : c'est une relation d'équivalence.

4 Exercices

1. Soit λ un paramètre réel et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Avec une autre matrice ça va aussi, à condition que les calculs restent raisonnables !
   On considère le système $(S)\ :\ MX = \lambda X$, d'inconnue X (matrice colonne).
   Résoudre (S) en discutant suivant la valeur de λ.

2. Une matrice 3×3 à inverser (pas trop de calculs !).

3. **D'après CCINP exercice 55**
Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n \qquad \text{avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

   a) Prouver que E est stable par combinaison linéaire (à traduire d'abord en quantificateurs).
   b) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de E. Montrer que

$$\text{si } u_0 = v_0 \text{ et } u_1 = v_1, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N},\, u_n = v_n.$$

   c) Dans cette question, on considère une suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.
   Remarque : on pourra ne pas terminer les calculs (recherche des constantes).