1 Suites réelles

- Exercices sur le programme précédent.
- Théorème d'encadrement (*)
- Théorème de la limite monotone (*, cas où la suite est majorée), suites adjacentes (*, bien distinguer la définition et le théorème).
- Suite extraite (définition). Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (u_n) tend aussi vers ℓ .
Si $u_{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $u_{2k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.
Théorème de Bolzano-Weierstrass (aucun exercice fait, démonstration non exigible).
- Aucun résultat vu sur les suites récurrentes, les exercices doivent être guidés.

2 Lois de composition internes, groupes

- Définition d'une loi de composition interne (lci) sur un ensemble E .
On s'appuiera surtout sur les exemples de lci déjà connues. Ne pas abuser des lois artificielles.
- Associativité, commutativité, élément neutre, élément inversible, partie stable par une lci.
- Structure de groupe : définition, groupe abélien (commutatif), itérées (puissances) d'un élément. Inverse d'un produit.
- Sous-groupe. G et $\{e\}$ sont des sous-groupes. Toute intersection de sous-groupes est un sous-groupe.
- Exemples de groupes à connaître : groupes additifs $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
Groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ (ensemble des bijections de E dans E).
 $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- Morphisme de groupes : définition. Propriétés élémentaires : $f(e) = e'$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
Pas encore vu : image directe / réciproque d'un sous-groupe, image, noyau.
- **Démonstration à savoir** : $\mathbb{U}, \mathbb{U}_n$, intersection de sous-groupes.

3 Exercices faits

1. La série harmonique, deuxième méthode

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = S_n - \ln n$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On utilisera à deux reprises l'inégalité classique $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

b) Donner un équivalent de (S_n) .

2. La série harmonique alternée. Peut être scindé, le a) et le b) sont presque indépendants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) i) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

ii) Montrer que (S_n) converge. Soit ℓ sa limite.

b) Déterminer par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$. En déduire ℓ .

On pourra écrire S_n sous forme intégrale en partant de $\int_0^1 t^{k-1} dt$.

3. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

a) Si $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{mk / k \in \mathbb{Z}\}$ est noté $m\mathbb{Z}$.

Montrer que $m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

b) Inversement, soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = m\mathbb{Z}$.

i) Montrer qu'il existe dans H un élément strictement positif.

ii) Montrer que $H \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément. Il est noté m .

iii) Montrer que $\forall x \in H, m|x$.

On pourra effectuer la division euclidienne de x par m .

iv) Montrer que $H = m\mathbb{Z}$.

4. Exercice du type :

- Montrer que ... est un sous-groupe de ...
- ... est-il un sous-groupe de ... ?
- Montrer que ... est un morphisme de groupes (pas d'image ou de noyau pour cette semaine).