MPSI

Programme de colle - semaine 13 du 08/01/2024 au 14/01/2024

1 Groupes

En question de cours seulement ! Pour les exercices, ne donner que de l'analyse.

- Morphisme de groupes : définition.
  L'image directe/réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe (*).
  Image : définition.
  Noyau : définition, caractérisation de l'injectivité (*).

2 Limites de fonctions

- Sur les limites, seules ont été faites les démonstrations marquées d'un (*). Nous n'avons pas fait d'exercice spécifiquement sur la recherche de limites, mais la colle peut être l'occasion de faire des révisions sur les croissances comparées, équivalents, etc.
- Notion de propriété vraie au voisinage d'un point (pas d'exercice fait).
- Définition des différentes notions de limites, notamment limite finie en un point fini (avec le dessin qui va avec). Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point. Unicité de la limite.
- Composition de limites fonction $\circ$ fonction (*).
- Caractérisation séquentielle de la limite (*) (savoir énoncer la propriété et démontrer un des deux sens c'est déjà bien).
- Théorème d'encadrement / minoration. Théorème de la limite monotone.

3 Continuité

- Continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle, notation $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Conservation de la continuité par opérations/composition.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Théorèmes (pas de démonstration) :
  - Théorème des valeurs intermédiaires, différents énoncés (savoir expliquer la méthode de dichotomie)
  - Fonction continue sur un segment : l'image est un segment ; traduction (la fonction est bornée et atteint ses bornes).
  - Théorème de la bijection (ou corollaire du TVI).

4 Exercices faits

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que f a une limite finie en $+\infty$.
   Indication : $\forall t \geqslant 1,\ t^2 \geqslant t$.

2. Montrer que toute fonction polynômiale réelle de degré impair a au moins une racine réelle.

3. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.
   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$. En déduire que f est constante.

5. **CCINP exo 43**
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
   a) i) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
      ii) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
   b) *(Question facultative, à faire en fonction du temps)*
      Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.
      Indication : si h est une telle fonction, on pourra considérer la suite $(h(u_n))$.