MPSI

Programme de colle - semaine 14 du 15/01/2024 au 21/01/2024

1 Structures d'anneau et de corps

- Structure d'anneau : définition (selon le programme, tout anneau est unitaire), règles de calcul (en particulier, identités remarquables pour deux éléments qui commutent), anneau intègre, groupe des inversibles.
- Exemples d'anneaux à connaître : $\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ensemble des fonctions de I (partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, ensemble des suites réelles.
- Structure de corps (selon le programme, tout corps est commutatif). Tout corps est intègre. Exemples de corps à connaître : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Morphisme d'anneau, sous-anneau. La notion d'idéal n'est pas au programme en sup.

2 Le corps des réels et nombres particuliers

- Nombres décimaux. Approximations décimales d'un réel à 10^{-n} près.
  $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ (ce n'est pas un corps).
  Savoir exprimer une approximation décimale par défaut, par excès, à l'aide de la partie entière.
- Nombres rationnels et irrationnels. Entiers premiers entre eux (notion introduite uniquement pour parler de la forme irréductible d'un rationnel).
  $\sqrt{2}$ est irrationnel (*).
- Partie dense dans $\mathbb{R}$. La définition officielle est "une partie est dense ssi elle rencontre tout ouvert non vide". J'ai également donné la caractérisation :
  "A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists a \in A \,/\, x < a < y$".
  Mais en pratique on n'utilise aucune des deux.
  Caractérisation séquentielle de la densité (*) : A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.
  $\mathbb{D}$ (*), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
- Caractérisation séquentielle de la borne supérieure : soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.
  -Si E est majorée, alors il existe une suite d'éléments de E qui converge vers $\sup(E)$.
  -Si E n'est majorée, alors il existe une suite d'éléments de E qui tend vers $+\infty$.

3 Dérivation

- Pour cette semaine, ça se limite aux questions de cours (démonstration des formules) et aux exercices d'étude de dérivabilité et recherche de limite en lien avec la dérivabilité.
- Taux d'accroissement, tangente, dérivabilité à gauche/droite, développement limité d'ordre 1 (son existence équivaut à la dérivabilité). Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité, réciproque fausse.
- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, multiplication par un scalaire, produit (*), inverse (*), composition (*) ; réciproque d'une bijection.
- **PAS ENCORE VU** : extremum, théorème de Rolle, TAF, IAF, convexité.

4 Exercices faits

1. **Entiers de Gauss**
   Les complexes de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ sont appelés les entiers de Gauss.
   L'ensemble des entiers de Gauss est noté $\mathbb{Z}[i]$.

   a) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.
   b) Montrer que si $z \in \mathbb{Z}[i]$, alors $|z|^2 \in \mathbb{N}$. En déduire que les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont 1, -1, i, $-i$.

2. L'ensemble $\left\{a + b\sqrt{2} \,/\, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$ est noté $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

   a) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
   b) Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$
   c) Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un corps.

3. Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   Montrer que si $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

4. Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée de $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sqrt{x} \end{array}$.

   (Changer de fonction)