1 Dérivation

- Exercices sur le programme précédent (calcul de dérivée, limite obtenue par dérivabilité ou DL₁)
- Extremum global, local (définitions). Extremum $\Rightarrow$ point critique (à l'intérieur de l'intervalle de définition).
- Théorème de Rolle (*), théorème des accroissements finis (*). Théorème de la limite de la dérivée (*).
Fonction lipschitzienne. Définition.
Lipschitzienne $\Rightarrow$ continue, réciproque fautive.
Inégalité des accroissements finis : si $|f'|$ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne.
- Variations de fonctions : caractérisation des fonctions croissantes (* : sens $f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante).
Si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point, alors f est strictement croissante.
- Dérivées successives. Formule de Leibniz (*).
- Exemples d'utilisation de l'IAF pour l'étude des suites récurrentes (voir ci-dessous).
- **Ne pas interroger sur la convexité.**

2 Exercices

- Soit $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *Possibilité de changer la fonction.*

$$x \longmapsto \arccos(1 - x^2)$$
 - Montrer que f est dérivable sur $]0, \sqrt{2}[$ et calculer f' sur cet intervalle.
 - Étudier la dérivabilité de f en 0.
 - Bonus : En déduire un équivalent simple de $\arccos(1 - y)$ quand y tend vers 0 à droite.
- CCINP exo 4**
 - Énoncer le théorème des accroissements finis.
 - Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
 - Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Rightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fautive.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
- Exercice type avec $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ f dérivable
 - Montrer que f admet un (unique) point fixe α
 - (éventuellement)
Montrer que $\alpha \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ (I : intervalle donné).
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq K |u_n - \alpha|$ (avec K donné ou à déterminer).
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq K^n \dots$
 - Que peut-on en déduire?

Selon la complexité de la fonction f , l'énoncé pourra être plus ou moins guidé.

Exemple fait : $f = \cos$, $I = [0, 1]$, $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$.