MPSI

Programme de colle - semaine 16 du 29/01/2024 au 04/02/2024

1 Convexité

Définitions et propriétés à illustrer par des dessins. Ça doit rester très simple (dire quelle propriété appliquer, et à quelle fonction). **Aucune démonstration.**

- Fonction convexe / concave sur un intervalle I.
- Caractérisation par la croissante des pentes.
- Si f est dérivable : f est convexe ssi f' est croissante.
- Pour une fonction convexe, la courbe est au-dessus des tangentes.
- Inégalité de Jensen : si f est convexe, alors $\forall n \geqslant 2$, $\forall x_1, \dots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ de somme 1, $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

2 Suites numériques

- Exercices sur les suites récurrentes, de la forme $u_{n+1} = f(u_n) \qquad (f$: fonction d'une variable réelle).
- La seule propriété au programme : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.
- Les exercices doivent être guidés.

3 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

(*) : démonstrations bien adaptées.

- Ça restera simple : on n'a pas encore fait beaucoup d'exercices.
- Divisibilité, division euclidienne : déjà vues, pas revues spécialement dans ce chapitre, à connaître.
- PGCD de deux entiers naturels a, b avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Algorithme d'Euclide (savoir l'expliquer), relation de Bézout. Extension du PGCD à $\mathbb{Z}^2$.
  Équivalence entre $(d|a \quad \text{et} \quad d|b)$ et $d|a \wedge b$ (*). Commutativité, associativité, $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$.
- Entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout (*) (à ne pas confondre avec une relation de Bézout)
  Lemme de Gauss (si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a|c$) et propriété sans nom (si $a|c$, $b|c$ et $a \wedge b = 1$, alors $ab|c$) (ces 2 propriétés *).
- PPCM de deux entiers naturels non nuls. Relation entre le PGCD et le PPCM. Équivalence entre $(a|m \quad \text{et} \quad b|m)$ et $a \vee b|m$.
  Aucun exercice fait sur le PPCM.
- **PAS ENCORE VU :** Généralisation à n entiers ($n \geqslant 3$), nombres premiers, décomposition, valuation p-adique, petit théorème de Fermat.
  Les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne sont pas au programme en MPSI.

4 Exercices faits

1. *Prototype d'exercice utilisant les principales techniques à connaître.*
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
   a) Montrer qu'elle est bien définie sur $\mathbb{N}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   c) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

2. **Équation diophantienne linéaire**
   L'exercice est long, ne pas hésiter à n'en donner qu'une partie, ou travailler directement sur un exemple.
   Soit a, b, c des entiers (a et b non nuls). Le but de l'exercice est de décrire la méthode générale permettant de résoudre l'équation $(E) : ax + by = c$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Montrer que si (E) admet des solutions, alors $a \wedge b | c$.
Dans toute la suite, on suppose que $a \wedge b | c$.

b) Donner $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ avec $a' \wedge b' = 1$, tels que (E) soit équivalente à $a'x + b'y = c'$.

c) Montrer que (E) admet au moins une solution.

d) On considère l'équation $(E_0)\ :\ a'x + b'y = 0$.
Montrer que si (x, y) est solution de (E_0), alors $a' | y$.

e) Décrire l'ensemble des solutions de (E_0) puis l'ensemble des solutions de (E).

f) Un exemple à résoudre

3. **CCINP exo 94**

a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a|c \quad \text{et} \quad b|c) \quad \Leftrightarrow \quad ab|c$.

c) On considère le système $(S)\ :\ \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

i) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

ii) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

4. **Inégalités obtenues à partir de la convexité** (questions indépendantes).

a) Comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n réels strictement positifs (utiliser la concavité de ln).

b) **Inégalité de Young**

Soit p, q des réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+}$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

On pourra utiliser la concavité de ln.

c) Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$ et illustrer.