MPSI

Programme de colle - semaine 16 du 05/02/2024 au 11/02/2024

1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- Exercices sur le programme de la semaine dernière.
- Nombres premiers : définition, l'ensemble est infini (*). Théorème de décomposition en produit de facteurs premiers (existence et unicité) (démonstration non exigible). Si un nombre premier divise un produit de facteurs, alors il divise l'un des facteurs (*). Valuation p-adique d'un entier > 0, utilisation pour le calcul du PGCD, PPCM.
- Congruences (rappel). Petit théorème de Fermat (*).
  Les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne sont pas au programme en MPSI.

2 Polynômes

- Selon le programme, en MPSI, les polynômes sont à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Écriture $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ ou $\sum\limits_{k \geqslant 0} a_k X^k$ (avec (a_k) presque nulle). Notation $\mathbb{K}[X]$. Opérations, coefficients de la somme, du produit. Identification des coefficients en cas d'égalité.
  La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'a pas été vue (la notion de polynôme n'a pas été définie formellement en tant qu'objet mathématique), ne pas demander de démonstration sur tous ces points. **Mais l'expression des coefficients du produit est à connaître.**
- Composition. Degré, propriétés. Degré de la somme, du produit. Notation $\mathbb{K}_n[X]$.
- Structure algébrique de $\mathbb{K}[X]$ (anneau intègre). Polynômes constants. Polynômes inversibles.
- Divisibilité, division euclidienne (démonstration non exigible).
- Fonction polynômiale associée à un polynôme P (notée $\widetilde{P}$, ou souvent P par abus de notation). Si deux polynômes ont la même fonction associée, alors ils sont égaux (à savoir traduire avec des quantificateurs). Racine. Caractérisation à l'aide de la divisibilité (**démonstration avec la division euclidienne**). Ordre de multiplicité.
- Dérivée d'un polynôme. Formule de Taylor. Caractérisation de l'ordre de multiplicité avec les dérivées successives (*).
- Les résultats déjà vus il y a quelques mois n'ont pas été revus mais sont à savoir en remplaçant "fonction polynômiale" par "polynôme". Par exemple : tout polynôme non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré $\leqslant n$ ayant $n+1$ racines distinctes est nul, etc.
- **Pas encore vu** : Relations coefficients - racines. Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Interpolation de Lagrange. Arithmérique des polynômes.

3 Exercices faits

1. **Nombres de Mersenne**
   Soit $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ $(a \geqslant 2)$.
   a) Montrer que $a - 1 | a^n - 1$.
   b) Montrer que si $m|n$, alors $a^m - 1 | a^n - 1$.
   c) On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = 5^{2^n} - 1$.
   a) Déterminer $v_2(u_0)$, $v_2(u_1)$ (v_2 : valuation 2-adique).
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_2(u_n) = n + 2$.

3. *Changer les paramètres*

   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

   b) Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Remarque : aucune connaissance sur les polynômes (annulateurs) de matrices n'est au programme en première année. Ne pas soulever de difficulté.

4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si a est racine de P de multiplicité r, alors a est racine de P' de multiplicité $r - 1$ (sans utiliser la caractérisation avec les dérivées successives).