

Q1 : Si le robot Sphero était parfaitement asservi, c'est à dire s'il suivait exactement les consignes de l'utilisateur (aucune erreur statique, aucun dépassement, temps de réponse nul), il suffirait de trois clics pour suivre la trajectoire théorique. Ceux-ci devraient imposer un cap à 0° , un second cap à 90° et un dernier à -90° .

Q2 : L'exigence 2 de maniabilité n'est pas respectée car le robot s'éloigne de plus de 25 cm de la trajectoire de consigne.

Q3 : La condition de RSG aux points I et J s'exprime par : $\overrightarrow{V(I \in 2/1)} = \overrightarrow{V(J \in 4/1)} = \vec{0}$

Q4 : On demande une relation entre r_{21} , p_{46} et p_{26} . Ceci nous oriente sur la décomposition du mouvement à effectuer. Les notations du sujet sont précisées. p_{ij} , q_{ij} et r_{ij} sont les composantes dans la base B_6 liée au châssis du robot du vecteur rotation. Ce sont donc des vitesses angulaires (en rad/s) associées aux mouvements de rotation autour de chacun des axes de la base en question. u_{ij} , v_{ij} et w_{ij} sont les composantes dans la base B_6 liée au châssis du robot du champ de vecteur vitesse de translation en M. Ce sont donc des vitesses linéaires (en m/s) associées aux mouvements de translation suivant de chacun des axes de la base en question.

On exprime la condition de RSG au point J et on écrit la composition des vecteurs vitesses sur la chaîne cinématique 4-6-2-1 (boucle fermée du graphe des liaisons) en J :

$$\overrightarrow{V(J \in 4/1)} = \overrightarrow{V(J \in 4/6)} + \overrightarrow{V(J \in 6/2)} + \overrightarrow{V(J \in 2/1)} = \vec{0}$$

On a les torseurs cinématique suivants :

$$\left\{ \sqrt{4/6} \right\} = \begin{pmatrix} p_{46} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B, B_6'} \quad \text{Pivot d'axe } (B, \overrightarrow{x_6'}) \text{ donc rotation uniquement autour de } (B, \overrightarrow{x_6'})$$

$$\left\{ \sqrt{6/2} \right\} = \begin{pmatrix} p_{62} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A, B_6'} \quad \text{Pivot d'axe } (A, \overrightarrow{x_6'}) \text{ donc rotation uniquement autour de } (A, \overrightarrow{x_6'})$$

$$\left\{ \sqrt{2/1} \right\} = \begin{pmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{pmatrix}_{I, B_6'} \quad \text{Ponctuelle de normale } (I, \overrightarrow{IO_S}) \text{ donc rotations possibles suivant les 3}$$

axes de la base B_6 . En théorie, translations possibles perpendiculairement à la normale ($\overrightarrow{IO_S}$ car la roue est conique et en contact à l'intérieur de la sphère). Mais le système de maintien (le graphe des liaisons est donné sans) supprime les translations possibles. Les degrés de liberté d'une liaison ne sont pas toujours tous utilisés dans un mécanisme. La liaison « équivalente » (notion abordée ultérieurement) est une rotule. Le sujet aurait dû préciser ce modèle de torseur ou donner un graphe des liaisons avec système de maintien et donc modéliser le contact 2/1 et 4/1 par des rotules...

$$\left\{ \sqrt{4/1} \right\} = \begin{pmatrix} p_{41} & 0 \\ q_{41} & 0 \\ r_{41} & 0 \end{pmatrix}_{J, B_6'} \quad \text{Même remarque que pour le torseur précédent.}$$

$\overrightarrow{V(J \in 4/1)} = \overrightarrow{V(J \in 4/6)} + \overrightarrow{V(J \in 6/2)} + \overrightarrow{V(J \in 2/1)} = \vec{0}$ revient à écrire la fermeture cinématique en moment au point J (méthode générale donnée au début du cours de synthèse sur les mécanismes)

$$\vec{J}\vec{B} \wedge p_{46} \overrightarrow{x_6'} + \vec{J}\vec{A} \wedge p_{62} \overrightarrow{x_6'} + \vec{J}\vec{I} \wedge (p_{21} \overrightarrow{x_6'} + q_{21} \overrightarrow{y_6'} + r_{21} \overrightarrow{z_6'}) = \vec{0}$$

$$\text{De plus : } \vec{J}\vec{I} = 2L \overrightarrow{x_6'} \quad \vec{J}\vec{A} = 2L \overrightarrow{x_6'} + R \overrightarrow{z_6'} \quad \vec{J}\vec{B} = R \overrightarrow{z_6'}$$

D'où :

$$R p_{46} \overrightarrow{y_6'} + R p_{62} \overrightarrow{y_6'} + 2L q_{21} \overrightarrow{z_6'} - 2L r_{21} \overrightarrow{y_6'} = \vec{0}$$

On projette sur $\overline{y_{6'}} : R p_{46} + R p_{62} - 2L r_{21} = 0$

Ainsi : $r_{21} = \frac{R}{2L} (p_{46} + p_{62})$ On identifie $\lambda = \frac{R}{2L}$

Q5 : On rappelle que le roulis du châssis du module interne par rapport au corps sphérique 1 n'est pas possible du fait de la forme des roues et de leur matière. Cela confirme les modèles de liaisons et torseurs choisis pour les contacts 2/1 et 4/1 de la question précédente.

On écrit la composition des torseurs cinématiques (ou fermeture cinématique toujours) sur la chaîne de solides 6-2-1 en A :

$$\{ \sqrt{6/1} \}_A = \{ \sqrt{6/2} \}_A + \{ \sqrt{2/1} \}_A$$

Par changement de point : $\overline{V(A \in 6/1)} = \overline{V(O_s \in 6/1)} + \overline{AO_s} \wedge \overline{\Omega_{6/1}} = (-L\overline{x_{6'}} + h_r\overline{z_s}) \wedge (p_{61}\overline{x_{6'}} + r_{61}\overline{z_{6'}})$
 le centre de la sphère est fixe dans 6 et dans 1.

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ x_s & \xrightarrow{\alpha} & x_6 \quad x_{6'} \\ y_s & & y_6 \quad y_{6'} \\ z_s & & z_6 \xrightarrow{\beta=0} z_{6'} \end{array}$$

On obtient en considérant $\alpha \neq 0$:

$$\overline{V(A \in 6/1)} = h_r r_{61} \sin\alpha \overline{x_{6'}} + (L r_{61} + h_r p_{61} \cos\alpha) \overline{y_{6'}} - h_r p_{61} \sin\alpha \overline{z_{6'}}$$

$$\text{D'où } \{ \sqrt{6/1} \} = \begin{pmatrix} p_{61} & h_r r_{61} \sin\alpha \\ 0 & L r_{61} + h_r p_{61} \cos\alpha \\ r_{61} & -h_r p_{61} \sin\alpha \end{pmatrix}_{A,B_{6'}} = \begin{pmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & L r_{61} + h_r p_{61} \\ r_{61} & 0 \end{pmatrix}_{A,B_{6'}} \quad \text{avec } \alpha = 0$$

$$\text{On a } \{ \sqrt{6/2} \}_A = \begin{pmatrix} p_{62} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A,B_{6'}}$$

Par changement de point :

$$\overline{V(A \in 2/1)} = \overline{V(I \in 2/1)} + \overline{AI} \wedge \overline{\Omega_{2/1}} = (-R\overline{z_{6'}}) \wedge (p_{21}\overline{x_{6'}} + q_{21}\overline{y_{6'}} + r_{21}\overline{z_{6'}})$$

RSG en I

$$\overline{V(A \in 1/2)} = -R p_{21}\overline{y_{6'}} + R q_{21}\overline{x_{6'}}$$

$$\{ \sqrt{2/1} \} = \begin{pmatrix} p_{21} & R q_{21} \\ q_{21} & -R p_{21} \\ r_{21} & 0 \end{pmatrix}_{A,B_{6'}}$$

La composition des mouvements donne dans le cas considéré : $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} p_{61} &= p_{62} + p_{21} \\ q_{21} &= 0 \\ r_{61} &= r_{21} \\ L r_{61} + h_r p_{61} &= -R p_{21} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$r_{61} = r_{21} = \lambda (p_{46} - p_{26}) \quad (p_{26} = -p_{62})$$

$$p_{21} = -\frac{L}{R}r_{61} - \frac{h_r}{R}p_{61} = -\frac{L}{R}\lambda(p_{46} - p_{26}) - \frac{h_r}{R}(p_{62} + p_{21}) \quad \text{avec } \lambda = \frac{R}{2L}$$

$$\text{Ce qui donne : } \left(1 + \frac{h_r}{R}\right)p_{21} = \left(\frac{1}{2} + \frac{h_r}{R}\right)p_{26} - \frac{1}{2}p_{46}$$

$$p_{61} = -p_{26} + p_{21} = -\frac{R}{2(R+h_r)}(p_{46} + p_{26}) \text{ d'où } \mu = -\frac{R}{2(R+h_r)}$$

Q6 : On a $p_{26} = k p_{36}$ et $p_{46} = k p_{56}$ (ce rapport de réduction est le rapport inverse du nombre de dents des engrenages 2/3 et 4/5. Voir cours synthèse mécanismes) donc $p_{61} = -\frac{R.k}{2(R+h_r)}(p_{36} + p_{56})$.

$$\text{On en déduit } \delta = -\frac{R.k}{2(R+h_r)} = 0.0467$$

Q7 : Un changement de cap se fait par rotation du module interne par rapport au corps sphérique autour de l'axe de lacet $\vec{z}_{6'}$. Il ne doit pas induire de mouvement de tangage, c'est-à-dire de rotation autour de l'axe $\vec{x}_{6'}$. Autrement dit, il faut : $p_{61} = 0$

Q8 : Lors d'un changement de cap, et compte tenu du résultat de la question Q6 :

$$p_{61} = 0 \Rightarrow \delta(p_{36} + p_{56}) = 0 \Rightarrow p_{36} = -p_{56}$$

Les moteurs doivent donc tourner en sens inverse (logique)

Q9 : Pour que le Sphero se déplace en ligne droite il ne faut pas qu'il y ait de changement de cap, c'est à dire de rotation du module interne suivant l'axe de lacet $\vec{z}_{6'}$. Il faut donc : $r_{61} = 0$

Q10. Afin de se déplacer en ligne droite, et compte tenu du résultat de la question Q5 :

$$r_{61} = 0 \Rightarrow \lambda(p_{46} - p_{26}) = 0 \Rightarrow p_{36} = p_{56}$$

Les moteurs doivent donc tourner dans le même sens à la même vitesse (logique).

$$Q11 : v = \overrightarrow{V(0_s \in 1/0)} \cdot \vec{y}_s = \overrightarrow{V(K \in 1/0)} + \overrightarrow{O_s K} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \cdot \vec{y}_s = (R_s \vec{z}_s \wedge (p_{10} \vec{x}_s + q_{10} \vec{y}_s + r_{10} \vec{z}_s)) \cdot \vec{y}_s$$

RSG en K

$$\text{D'où : } v = -R_s \cdot p_{10}$$

Q12 : D'après l'énoncé, le repère R_s ne s'incline pas par rapport à R_0 et d'après les figures de projection données Figure 10 : $p_{60} = \alpha$

Or l'angle α est supposé constant d'où $p_{60} = 0$

Q13 : par composition des mouvements entre 6, 1 et 0, il vient en projection $\overrightarrow{\Omega_{6/0}} \cdot \vec{x}_s = \overrightarrow{\Omega_{6/1}} \cdot \vec{x}_s + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \cdot \vec{x}_s$

$$\text{D'où : } p_{61} + p_{10} = 0$$

$$Q14 : \text{d'après les questions précédentes : } v = -R_s p_{10} \quad p_{10} = -p_{61} \quad p_{61} = \delta(p_{36} + p_{56}) \quad p_{36} = p_{56}$$

$$\text{D'où : } v = 2 \cdot R_s \cdot \delta \cdot p_{36} = 74 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0467 \cdot 6000 \cdot \frac{2\pi}{60} = 2.17 \text{ m/s}$$

Exigence de vitesse max respectée.

Interprétation graphique rapide de Q14 :

RSG en I : $\overrightarrow{V(I \in 2/1)} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{V(I \in 2/6)} + \overrightarrow{V(I \in 6/1)} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{V(I \in 2/6)} = \overrightarrow{V(I \in 1/6)}$

- $\overrightarrow{V(I \in 2/6)} = \overrightarrow{V(A \in 2/6)} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/6}}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{V(I \in 2/6)}\| = R p_{26}$ (modèle « $V = R\omega$ »)

- $\overrightarrow{V(I \in 1/6)} = \overrightarrow{V(O_S \in 1/6)} + \overrightarrow{IO_S} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/6}}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{V(I \in 1/6)}\| = (R + h_r) p_{16}$ (modèle « $V = R\omega$ »)

D'où en valeur absolue : $R p_{26} = (R + h_r) p_{16}$ (le signe ne nous intéresse pas)

RSG en K : $\overrightarrow{V(K \in 1/0)} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{V(K \in 1/6)} + \overrightarrow{V(K \in 6/0)} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{V(K \in 1/6)} = -\overrightarrow{V(K \in 6/0)}$

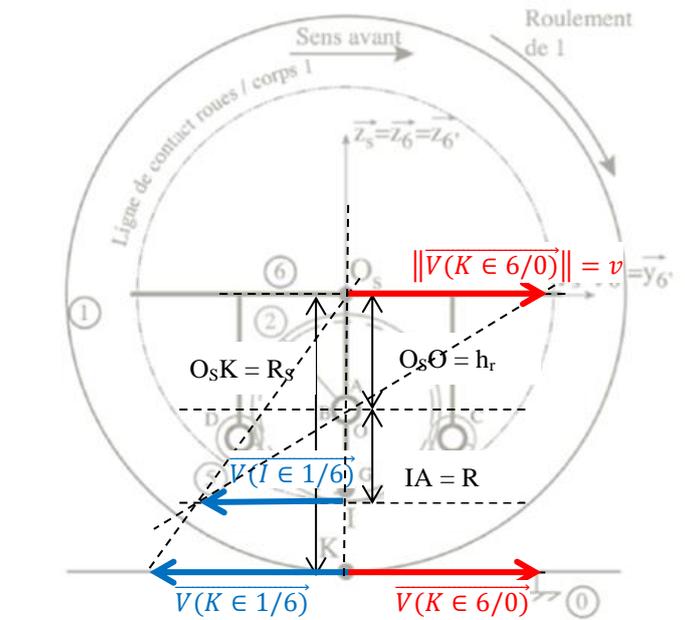
- $\overrightarrow{V(K \in 1/6)} = \overrightarrow{V(O_S \in 1/6)} + \overrightarrow{KO_S} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/6}}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{V(K \in 1/6)}\| = R_S p_{16}$ (modèle « $V = R\omega$ »)

- $\overrightarrow{V(K \in 6/0)} = \overrightarrow{V(O_S \in 6/0)} + \overrightarrow{KO_S} \wedge \overrightarrow{\Omega_{6/0}}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{V(K \in 6/0)}\| = v$

Finalement en norme : $v = R_S p_{16} = R_S \frac{R}{R+h_r} p_{26}$



1 tourne autour de O_S dans son mouvement par rapport à 6.

6 translate suivant \vec{y}_S dans son mouvement par rapport à 0

Le moteur fait tourner 2 avec un rapport de réduction de k

D'où : le même résultat (mais obtenu beaucoup plus rapidement) que Q14 : $v = R_S \frac{R}{R+h_r} k p_{36}$

Les lois de distribution des vitesses sont triangulaires. Voir le schéma ci-dessus pour les constructions graphiques (hors programme en PSI et MP)

Bilan :

Toujours la même méthode à appliquer : RSG \Rightarrow décomposition mouvt \Rightarrow Babar aux pts de vitesse nulle
 Le sujet propose une vision torsorielle. Cela le complique notablement et inutilement mais il faut le respecter.
 Une bonne connaissance des degrés de liberté pour chaque liaison est nécessaire. Une bonne compréhension des mouvements et du principe de fonctionnement du robot aussi...on peut traiter Q7,8,9,10 12,13 sans avoir réussi les autres questions.