Problème : Robot Sphero (extrait Centrale MP 18)

Q1 : Si le robot Sphero était parfaitement asservi, c'est à dire s'il suivait exactement les consignes de l'utilisateur (aucune erreur statique, aucun dépassement, temps de réponse nul), il suffirait de trois clics pour suivre la trajectoire théorique. Ceux-ci devraient imposer un cap à 0°, un second cap à 90° et un dernier à -90°.

Q2 : L'exigence 2 de maniabilité n'est pas respectée car le robot s'éloigne de plus de 25 cm de la trajectoire de consigne.

Q3 : La condition de RSG aux points I et J s'exprime par : $\overrightarrow{V(I\in 2/1)} = \overrightarrow{V(J\in 4/1)} = \vec{0}$

Q4 : On exprime la condition de RSG au point J et on écrit la composition des vecteurs vitesse sur la chaine cinématique 4-6-2-1 en J : $\overrightarrow{V(J\in 4/1)} = \overrightarrow{V(J\in 4/6)} + \overrightarrow{V(J\in 6/2)} + \overrightarrow{V(J\in 2/1)} = \vec{0}$

On a les torseurs cinématique suivants :

$\{\mathcal{V}\,4/6\} = \begin{Bmatrix} p_{46} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,B_{6'}}$ $\{\mathcal{V}\,6/2\} = \begin{Bmatrix} p_{62} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}}$ $\{\mathcal{V}\,2/1\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{I,B_{6'}}$ $\{\mathcal{V}\,4/1\} = \begin{Bmatrix} p_{41} & 0 \\ q_{41} & 0 \\ r_{41} & 0 \end{Bmatrix}_{J,B_{6'}}$

$$\overrightarrow{JB}\wedge p_{46}\overrightarrow{x_{6'}} + \overrightarrow{JA}\wedge p_{62}\overrightarrow{x_{6'}} + \overrightarrow{JI}\wedge (\,p_{21}\overrightarrow{x_{6'}} + q_{21}\overrightarrow{y_{6'}} + r_{21}\overrightarrow{z_{6'}}\,) = \vec{0}$$

De plus : $\overrightarrow{JI} = 2L\overrightarrow{x_{6'}}$ $\overrightarrow{JA} = 2L\overrightarrow{x_{6'}} + R\overrightarrow{z_{6'}}$ $\overrightarrow{JB} = R\overrightarrow{z_{6'}}$

Ainsi : $r_{21} = \frac{R}{2L}(p_{46} + p_{62})$ On identifie $\lambda = \frac{R}{2L}$

Q5 : On écrit la composition des torseurs cinématiques sur la chaine de solides 6-2-1 en A :

$$\{\mathcal{V}\,6/1\} = \{\mathcal{V}\,6/2\} + \{\mathcal{V}\,2/1\}$$

Par changement de point : $\overrightarrow{V(A\in 6/1)} = \overrightarrow{V(O_s\in 6/1)} + \overrightarrow{AO_s}\wedge\overrightarrow{\Omega_{6/1}} = (-L\overrightarrow{x_{6'}} + h_r\overrightarrow{z_s})\wedge(\,p_{61}\overrightarrow{x_{6'}} + r_{61}\overrightarrow{z_{6'}}\,)$

On obtient :

$$\overrightarrow{V(A\in 6/1)} = h_r\ r_{61}\,sin\alpha\,\overrightarrow{x_{6'}} + (L\ r_{61} + h_r\ p_{61}\,cos\alpha\,)\overrightarrow{y_{6'}} - h_r\ p_{61}\,sin\alpha\,\overrightarrow{z_{6'}}$$

$$\text{D'où } \{\mathcal{V}\,6/1\} = \begin{Bmatrix} p_{61} & h_r\ r_{61}\,sin\alpha \\ 0 & L\ r_{61} + h_r\ p_{61}\,cos\alpha \\ r_{61} & -h_r\ p_{61}\,sin\alpha \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}} = \begin{Bmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & L\ r_{61} + h_r\ p_{61} \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}}$$

$$\text{On a } \{\mathcal{V}\,6/2\} = \begin{Bmatrix} p_{62} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}}$$

Par changement de point :

$$\overrightarrow{V(A\in 2/1)} = \overrightarrow{V(I\in 2/1)} + \overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = (-R\overrightarrow{z_{6'}})\wedge(\,p_{21}\overrightarrow{x_{6'}} + q_{21}\overrightarrow{y_{6'}} + r_{21}\overrightarrow{z_{6'}}\,)$$

$$\overrightarrow{V(A\in 1/2)} = -R\,p_{21}\overrightarrow{y_{6'}} + R\,q_{21}\overrightarrow{x_{6'}}$$

$$\{\mathcal{V}\,2/1\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & R\,q_{21} \\ q_{21} & -R\,p_{21} \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_{6'}}$$

La composition des mouvements donne dans le cas considéré : $\alpha = 0$

$$p_{61} = p_{62} + p_{21}$$
$$q_{21} = 0$$
$$r_{61} = r_{21}$$
$$L\ r_{61} + h_r\ p_{61}\ = -R\, p_{21}$$

Conclusion :

$$r_{61}\ =\ r_{21} = \lambda\,(\,p_{46} - p_{26})$$
$$p_{21} = -\frac{L}{R} r_{61} - \frac{h_r}{R} p_{61} = -\frac{L}{R}\lambda\,(\,p_{46} - p_{26}) - \frac{h_r}{R}\,(\,p_{62} + p_{21})$$

Ce qui donne : $\left(1 + \frac{h_r}{R}\right) p_{21} = \left(\frac{1}{2} + \frac{h_r}{R}\right) p_{26} - \frac{1}{2} p_{46}$

$p_{61} = -p_{26} + p_{21} = -\frac{R}{2(R+h_r)}(p_{46} + p_{26})$ d'où $\mu = -\frac{R}{2(R+h_r)}$

Q6 : On a $p_{26} = k\ p_{36}$ et $p_{46} = k\ p_{56}$ donc $p_{61}\ =\ -\frac{R.k}{2(R+h_r)}(p_{36} + p_{56})$.
On en déduit $\delta =\ -\frac{R.k}{2(R+h_r)} = 0.0467$
Q7 : Un changement de cap se fait par rotation du module interne par rapport au corps sphérique autour de l'axe de lacet $\overrightarrow{z_{6'}}$. Il ne doit pas induire de mouvement de tangage, c'est-à-dire de rotation autour de l'axe $\overrightarrow{x_{6'}}$.
Autrement dit, il faut : $p_{61} = 0$

Q8 : Lors d'un changement de cap, et compte tenu du résultat de la question Q6 :

$$p_{61} = 0 \Rightarrow \delta(p_{36} + p_{56}) = 0 \Rightarrow p_{36} = -p_{56}$$

Les moteurs doivent donc tourner en sens inverse (logique)

Q9 : Pour que le Sphero se déplace en ligne droite il ne faut pas qu'il y ait de changement de cap, c'est à dire de rotation du module interne suivant l'axe de lacet $\overrightarrow{z_{6'}}$. Il faut donc : $r_{61} = 0$

Q10. Afin de se déplacer en ligne droite, et compte tenu du résultat de la question Q5 :

$$r_{61} = 0 \Rightarrow \lambda(p_{46} - p_{26}) = 0 \Rightarrow p_{36} = p_{56}:$$

Les moteurs doivent donc tourner dans le même sens à la même vitesse (logique).

Q11 : $v = \overrightarrow{V(0_s \in 1/0)}.\overrightarrow{y_s} = (\overrightarrow{V(K \in 1/0)} + \overrightarrow{O_sK} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}).\overrightarrow{y_s} = (-R_s\overrightarrow{z_s} \wedge (\,p_{10}\overrightarrow{x_s} +\ q_{10}\overrightarrow{y_s} +\ r_{10}\overrightarrow{z_s})).\overrightarrow{y_s}$
D'où : $v = -R_s.\ p_{10}$

Q12 : D'après l'énoncé, le repère Rs ne s'incline pas par rapport à R_0 et d'après les figures de projection données Figure 10 : $p_{60}\ = \dot{\alpha}$
Or l'angle α est supposé constant d'où $p_{60} = 0$

Q13 : par composition des mouvements entre 6, 1 et 0 , il vient en projection $\overrightarrow{\Omega_{6/0}}.\overrightarrow{x_s} = \overrightarrow{\Omega_{6/1}}.\overrightarrow{x_s}\ + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}.\overrightarrow{x_s}$
D'où : $p_{61} + p_{10} = 0$

Q14 : d'après les questions précédentes : $v = -Rs.p_{10}$ $p_{10} = -p_{61}$ $p_{61} = \delta(p_{36} + p_{56})$ $p_{36} = p_{56}$
D'où : $v = 2.R_s.\ \delta.p_{36} = 74.10^{-3}.0.0467.6000.{}^{2\pi}/_{60} = 2.17\ m/s$
Exigence de vitesse max respectée.

Exercice : roue ez-wheel (extrait ccp MP 14)

Q1 : Quand la trajectoire du fauteuil est une droite le rayon de courbure est infini : $\rho \to +\infty$ et $\omega_g = \omega_d$

Quand le fauteuil tourne autour de l'axe $\left(O_f, \vec{z}_0\right)$, il pivote sur lui-même, le rayon de courbure est nul : : $\rho = 0$ et $\omega_g = -\omega_d$

Q2 : Quand le fauteuil tourne autour de l'axe $\left(O_g, \vec{z}_0\right)$, il pivote sur sa roue gauche et O_f parcourt un cercle de rayon a autour de O_g, le rayon de courbure est nul : :$\rho = \frac{a}{2}$ et $\omega_g = 0$

Q3a : La condition de roulement sans glissement en I_g donne la relation cinématique suivante :

$$\vec{V}\,(Ig, Rg/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}\left(O_f, Rf/R_0\right) = \underbrace{\vec{V}\left(O_f, Rf/Rg\right)}_{\vec{0}\, car\, O_f \in \left(Og, \vec{y}_f\right)} + \vec{V}\left(O_f, Rg/R_0\right) = \underbrace{\vec{V}\,(Ig, Rg/R_0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O_f Ig} \wedge \vec{\Omega}\,(Rg/R_0)$$

$$\vec{\Omega}\,(Rg/R_0) = \vec{\Omega}\left(Rg/R_f\right) + \vec{\Omega}\left(R_f/R_0\right) = \omega_g\, \vec{y}_f + \dot{\beta}\, \vec{z}_f$$

$$\vec{V}\left(O_f, R_f/R_0\right) = \left(\frac{a}{2}\vec{y}_f - R\,\vec{z}_f\right) \wedge \left(\omega_g\, \vec{y}_f + \dot{\beta}\, \vec{z}_f\right) = \frac{a}{2}\vec{y}_f \wedge \dot{\beta}\, \vec{z}_f - R\,\vec{z}_f \wedge \omega_g\, \vec{y}_f$$

$$\vec{V}\left(O_f, R_f/R_0\right) = \left(\frac{a}{2}\dot{\beta} + R\omega_g\right)\vec{x}_f$$

Q3b : La condition de roulement sans glissement en I_d donne la relation cinématique suivante :

$$\vec{V}\,(Id, Rd/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}\left(O_f, R_f/R_0\right) = \underbrace{\vec{V}\left(O_f, R_f/Rd\right)}_{\vec{0}\, car\, O_f \in (Od, \vec{y}f)} + \vec{V}\left(O_f, Rd/R_0\right) = \underbrace{\vec{V}\,(Id, Rd/R_0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O_f Id} \wedge \vec{\Omega}\,(Rd/R_0)$$

$$\vec{\Omega}\,(Rd/R_0) = \vec{\Omega}\left(Rd/R_f\right) + \vec{\Omega}\left(R_f/R_0\right) = \omega_d\, \vec{y}_f + \dot{\beta}\, \vec{z}_f$$

$$\vec{V}\left(O_f, R_f/R_0\right) = \left(-\frac{a}{2}\vec{y}_f - R\,\vec{z}_f\right) \wedge \left(\omega_d\, \vec{y}_f + \dot{\beta}\, \vec{z}_f\right) = -\frac{a}{2}\vec{y}_f \wedge \dot{\beta}\, \vec{z}_f - R\,\vec{z}_f \wedge \omega_d\, \vec{y}_f$$

$$\vec{V}\left(O_f, R_f/R_0\right) = \left(-\frac{a}{2}\dot{\beta} + R\omega_d\right)\vec{x}_f$$

Q3c : $\vec{V}\left(O_f, R_f/R_0\right) = \underbrace{\vec{V}\left(O, R_f/R_0\right)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O_f O} \wedge \vec{\Omega}\left(R_f/R_0\right)$

$\vec{V}\left(O_f, R_f/R_0\right) = \rho\, \vec{y}_f \wedge \dot{\beta}\, \vec{z}_0$ d'où $\vec{V}\left(O_{f,}R_{f/}R_0\right) = \rho\dot{\beta}\, \vec{x}_f$

Q4 : On a : $V(t) = \rho\dot{\beta}$ et on obtient le système d'équations suivant en utilisant les résultats de la Q14 :

$\frac{a}{2}\dot{\beta} + R\omega_g = \rho\dot{\beta} \quad \Rightarrow \frac{a}{2}\frac{V(t)}{\rho} + R\omega_g = V(t)$ $\qquad \boxed{\omega_g = \frac{1}{R}V(t)\left(1 - \frac{a}{2\rho}\right)}$

$-\frac{a}{2}\dot{\beta} + R\omega_d = \rho\dot{\beta}$ $\qquad \boxed{\omega_d = \frac{1}{R}V(t)\left(1 + \frac{a}{2\rho}\right)}$

Le résultat est rassurant. La roue intérieure au virage tourne moins vite que la roue extérieure. Sur un véhicule avec une seule motorisation, on utilise un différentiel pour respecter ces résultats.