

Programme de colle - semaine 19 du 04/03/2024 au 10/03/2024

1 Structure d'espace vectoriel

- Exercice sur le programme de la semaine précédente (SEV, famille de vecteurs).
- Base d'un EV. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, ($\mathbb{K}[X]$ évoqué), de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (*pas d'exercice fait sur les bases canoniques mais il faut pouvoir les donner instantanément*).

2 Développements limités

Bien insister sur les méthodes de base, commencer pour tout le monde par une recherche de DL simple contenant au minimum un produit ou une composition.

Pas de démonstration pour les résultats suivis d'un $\emptyset$.

- Définition d'un DL_n en 0, unicité des coefficients. Troncature.
- DL de $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$ (démonstration directe).
- DL obtenu par "primitivation" ($\emptyset$). DL de $x \mapsto \ln(1+x)$.
- Formule de Taylor-Young ($\emptyset$). DL de $\exp$, $\sin$, $\cos$, ch , sh , $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\arctan$ à un ordre quelconque. DL de $\tan$ à l'ordre 3 uniquement (démonstration).
- Opérations sur les DL : pas de résultat théorique. Le plus important reste la maîtrise des $o(\cdot)$ (notamment pour le produit ou la composition).
La règle générale est que si on veut le DL_n de fg ou $f \circ g$, on part de l'ordre n pour f et pour g (interdiction de partir à un ordre plus bas sauf si on peut expliquer pourquoi).
Pour la composition, ne pas oublier de s'assurer que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
- Inverse / quotient de DL : pas de propriété à savoir, il faut juste composer le DL de $\frac{1}{1 \pm x}$.
- **Pas encore vu** : utilisation des DL (asymptote, étude locale, extremum local). **On se concentre cette semaine sur la recherche de DL / limite.**

3 Exercices

1. Algèbre linéaire

Montrer qu'une famille de fonctions est libre (utilisation par exemple pour la recherche de base de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 / suite récurrente linéaire d'ordre 2). Nous avons traité l'exemple de la famille $(\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch})$ par 4 méthodes différentes.

2. CCINP exo 1 (ancien)

- On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

- À titre indicatif : **manipulation des $o(\cdot)$** (pas refait récemment, mais à maîtriser absolument)

Au voisinage de 0, compléter si possible par $o(x^n)$ avec le plus grand $n \in \mathbb{N}$ possible et justifier :

$$o(x^2) + o(x^4) =$$

$$x^2 o(x^3) =$$

$$o(x^2) - o(x^2) =$$

$$o(x^2)o(x^3) =$$

$$x^2 + o(x^3) =$$

$$\frac{o(x^3)}{o(x^2)} =$$

$$\frac{o(x^3)}{x^2} =$$

$$\frac{x^3}{o(x^2)} =$$

$$o(x^2 + 3x) =$$