Programme de colle - semaine 20 du 11/03/2024 au 17/03/2024

1 Développements limités

- Exercices sur le programme précédent.
- Exemples de recherche d'asymptote en $\pm\infty$ à l'aide des DL, étude de signe local, recherche d'équivalent, etc.
- Si f de classe $\mathcal{C}^2$ vérifie $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors f a un minimum local en x_0 (pas d'exercice fait).

2 Algèbre linéaire, épisode 2

- On commencera par s'assurer que les notions vues à l'épisode 1 (SEV, famille de vecteurs) sont bien comprises.
- Application linéaire : définition, caractérisation par $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$, propriétés élémentaires.
- Image, noyau. Ce sont des SEV.
Caractérisation de l'injectivité (déjà vue dans le cadre des morphismes de groupes, pas redémontrée ici).
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, noyau d'une matrice.
- Somme de deux SEV. Définition. C'est un SEV. *Pas d'exercice fait sur la somme.* Somme directe, caractérisation avec l'intersection.
- SEV supplémentaires.
Caractérisation avec des quantificateurs ou avec $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $E = F + G$.
Projection p sur F parallèlement à G (lorsque $E = F \oplus G$).
Autres propriétés vues (ne pas interroger dessus) : p est linéaire, $\text{Im } p = F$, $\text{Ker } p = G$, $p \circ p = p$ et la caractérisation des endomorphismes vérifiant $p \circ p = p$.
Un dessin est bienvenu pour illustrer les notions de SEV supplémentaires et de projection.
- **PAS VU** : dimension, rang, matrice d'application linéaire, symétrie.

3 Exercices

1. Recherche d'asymptote

On pourra changer la fonction

- a) Soit $f : x \mapsto (x + 1) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$

On pourra se ramener en 0 en posant $y = \frac{1}{x}$

- b) En déduire que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote pour les grandes abscisses.

2. Changer la matrice

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M . Décrire $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

3. CCINP exo 60

Exercice un peu long (en l'état actuel des connaissances), on pourra n'en donner qu'une partie.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

- a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
- b) f est-il surjectif?
- c) Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- d) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

4. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u_1)$ avec $u_1 = (1, 1, -1)$, $G = \{(x, y, z) \in E / x + y + z = 0\}$
Montrer que $E = F \oplus G$ et donner l'expression analytique de p , la projection sur F parallèlement à G .