MPSI

Programme de colle - semaine 21 du 18/03/2024 au 24/03/2024

1 Algèbre linéaire, épisode 2

- Exercices sur les applications linéaires (programme précédent).
- SEV supplémentaires. Si $E = F \oplus G$, projection p sur F parallèlement à G (voir exercice plus bas sur $p \circ p = p$).
- Symétrie par rapport à F parallèlement à G (pas d'exercice fait). La caractérisation par $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ a été vue.
- Détermination d'une application linéaire :
  - Détermination sur une base : Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E.
    Pour toute famille $(v_1, \dots, v_n)$ d'éléments de F, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(u_i) = v_i$.
  - Détermination sur une somme directe (n'a pas été démontré) : Soit E_1, E_2 deux SEV de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
    Pour toutes $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.
  - Si $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E, alors $\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.
  - Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
    f est injective (resp. surjective, bijective) ssi $\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ et libre (resp. génératrice de E, une base de E).
    Voir les exercices ci-dessous.
- **PAS VU** : dimension, rang, matrice d'application linéaire.

2 Fractions rationnelles

- Donner un exercice (simple) comportant une décomposition en éléments simples à tout le monde.
- L'important est avant tout la pratique donc on évitera les calculs inutilement compliqués ou les exercices abstraits. La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.
- Forme irréductible, degré, fonction rationnelle associée, racine (ou zéro), pôle, multiplicité. Partie entière.
- Existence et unicité d'une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ (savoir énoncer la forme générale de la décomposition. La démonstration est hors-programme). Seul le calcul du coefficient d'un pôle simple est officiellement au programme.
  Astuce principale : multiplier puis évaluer.
  Nous avons vu quelques autres astuces : utilisation des limites, évaluation en un point, utilisation de la DES complexe pour trouver la DES réelle, parité).
- L'expression $\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$ ne sera vue que lundi matin (coefficient d'un pôle simple), il n'est pas clair qu'elle soit exigible (le programme officiel est flou à ce sujet).
- Savoir écrire la forme générale de la DES pour tout type de fraction (en laissant les coefficients indéterminés).
- Applications aux calculs de certaines primitives et sommes.
- Pas encore vu : décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

3 Exercices

1. **Démonstrations possibles en questions de cours**
   Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
   a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.
      Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ en faisant un raisonnement par analyse - synthèse.
   b) Si $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E, alors $\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$

c) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ est libre, alors f est injective.

2. **Exercices possibles**
   - Un couple de SEV supplémentaires avec éventuellement une projection à expliciter.
   - Une DES simple avec un calcul de primitive / somme.