

Problème 1 : Vérification de performances d'un hélicoptère

I. Mise en situation

I.1 Contexte

Un hélicoptère est un aéronef qui peut effectuer un vol stationnaire et permet ainsi des missions inaccessibles à la plupart des autres aéronefs.

I.2 Présentation du système

On s'intéresse dans ce sujet à l'hélicoptère Robinson R44 Raven II, un hélicoptère léger produit par la compagnie Robinson Helicopter depuis 2006. Alliant fiabilité et performance, le Robinson R44 est devenu l'hélicoptère le plus vendu au monde dans sa catégorie.



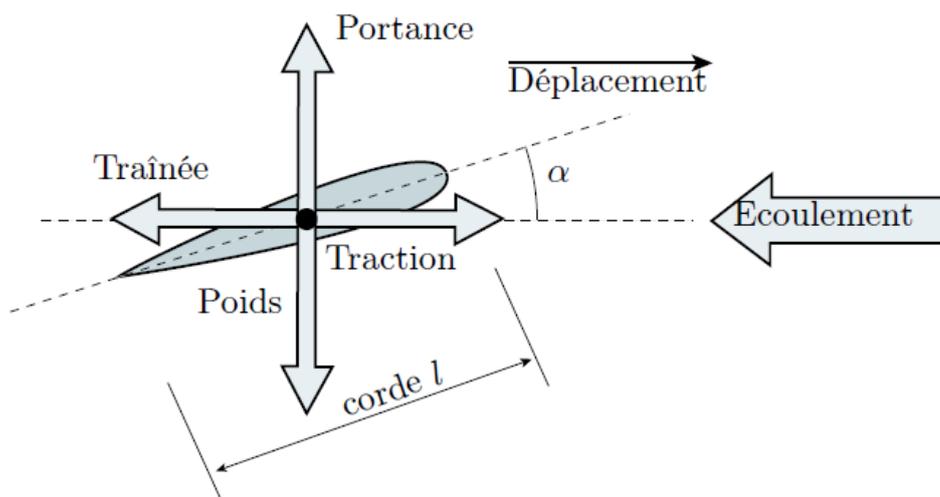
I.3 Principaux éléments constitutifs

Cet hélicoptère est composé d'un rotor principal à deux pales et d'un rotor arrière en extrémité de la queue. Les deux pales du rotor principal et l'hélice du rotor de queue sont entraînées par un unique moteur et la puissance transmise est adaptée en continu en fonction de la configuration de vol souhaitée.

I.4 Fonctionnement

Un objet placé dans un écoulement d'air, comme c'est le cas de la pale d'hélicoptère, subit une force aérodynamique. On décompose cette force en deux composantes :

- Une composante qui s'applique dans la direction de l'écoulement et dans le sens du vent relatif : **la traînée**.
- Une composante perpendiculaire, dirigée vers le haut : **la portance**, créée par une différence de pression entre les parties inférieure (intrados) et supérieure (extrados) de la pale.



Dans un écoulement horizontal, l'équilibre vertical de l'aéronef peut être atteint si la portance compense son poids. Le maintien en vol horizontal est assuré par une force de traction qui s'oppose à la traînée.

Pour que ces actions soient créées, chaque pale doit nécessairement être inclinée d'un certain angle autour de son axe longitudinal : c'est l'angle d'incidence (parfois également nommé angle d'attaque), noté α .

En vol stationnaire, les angles d'incidence de deux pales sont égaux et constants. Mais lorsque l'hélicoptère se déplace, il faut les faire varier de manière adaptée. Le dispositif qui permet, selon les consignes du pilote, d'appliquer cette variation d'angle d'incidence est le plateau de pas cyclique.

I.5 Performances et cahier des charges

On considère l'extrait de cahier des charges suivant.

Critère	Niveau	Limite
Vitesse longitudinale maximale (km/h)	250	mini
Vitesse ascensionnelle maximale (km/h)	20	mini
Masse transportable (kg)	400	mini
Distance franchissable (km)	600	mini

II. Vérification du critère de masse transportable

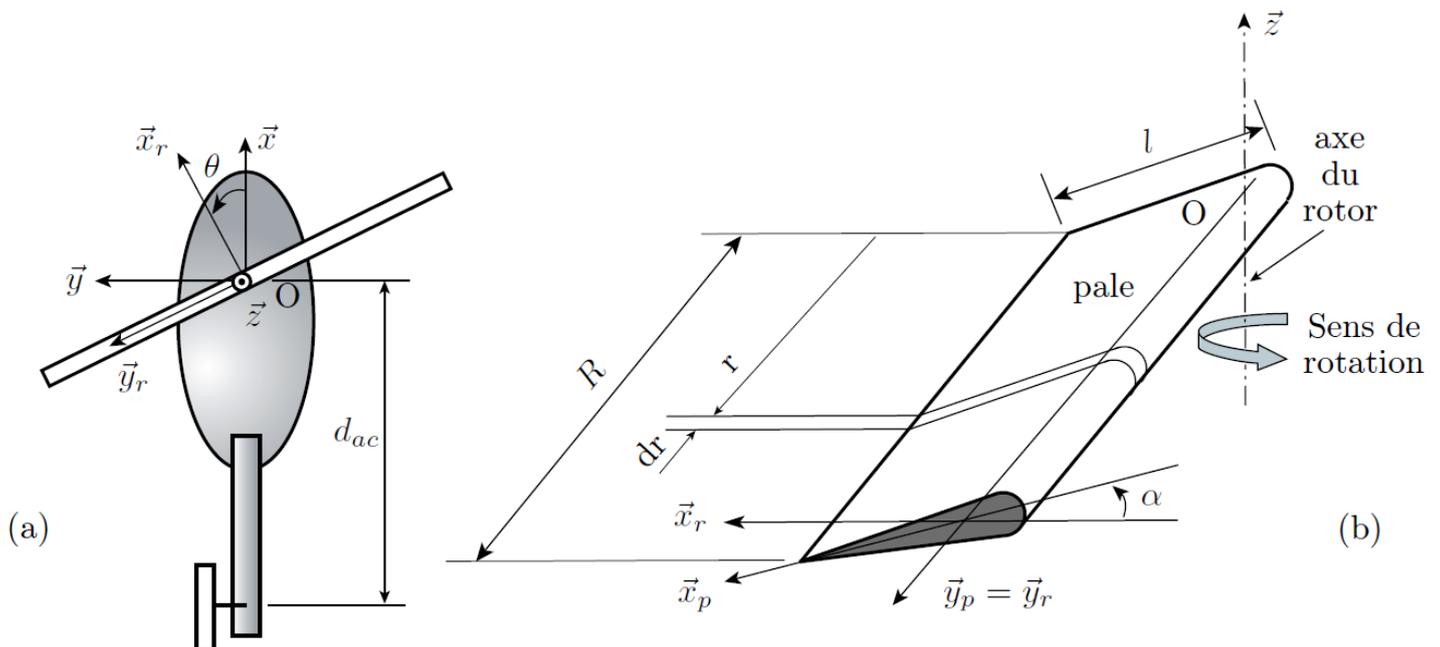
L'objectif de cette partie est de déterminer si les choix techniques retenus par le constructeur permettent de respecter le critère de masse embarquée défini ci-avant.

On se place donc ici dans le cas d'un décollage et on cherche à déterminer l'action de portance créée par l'air sur les pales pour vérifier quel poids elle peut compenser.

II.1 Détermination de l'action mécanique de l'air sur le rotor principal

On considère une voilure tournante constituée de deux pales identiques de longueur $R = 5$ m et de largeur de corde $l = 26$ cm, disposées symétriquement par rapport à l'axe du rotor. On néglige l'interaction aérodynamique entre les pales ainsi que tous les effets liés à la longueur finie et à la turbulence. L'angle d'incidence α correspond à l'angle que fait la direction \vec{x}_p de la pale avec la direction \vec{x}_r liée au rotor.

La figure ci-dessous donne une description du paramétrage : (a) vue de dessus et repère tournant lié au rotor et (b) géométrie simplifiée de la pale et repère de la pale.



Les densités d'effort surfacique s'appliquant sur une pale, entraînant respectivement la portance et la traînée, sont données par un modèle de comportement, simple mais cohérent en première approximation, obtenu par des essais en soufflerie :

- $f_z(r) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_z(\alpha) \cdot r^2 \cdot \omega^2$ pour la portance
- $f_x(r) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x(\alpha) \cdot r^2 \cdot \omega^2$ pour la traînée

Dans ces expressions, ρ désigne la masse volumique de l'air valant 1.3 kg/m^3 dans les conditions normales. $C_x(\alpha)$ et $C_z(\alpha)$ sont respectivement les coefficients de traînée et de portance. Ils dépendent de l'angle α que fait la corde du profil avec la direction de l'écoulement, sont sans unité et déterminés expérimentalement. $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du rotor (repère $(O, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r)$) par rapport au fuselage de l'hélicoptère (repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$).

- Q1.** Donner l'expression de l'action élémentaire de l'air sur une pale, notée $\overrightarrow{dR}_{\text{air} \rightarrow \text{pale}}$, agissant sur un élément de pale de surface projetée $dS = l.dr$.
- Q2.** En déduire la résultante des actions de l'air sur une pale, notée $\overrightarrow{R}_{\text{air} \rightarrow \text{pale}}$. L'écrire sous la forme $\overrightarrow{R}_{\text{air} \rightarrow \text{pale}} = A.(C_z(\alpha)\vec{z} + C_x(\alpha)\vec{x}_r)$ et expliciter A en fonction de ρ , l , R et ω .
- Q3.** En déduire la force totale exercée par l'air sur les deux pales du rotor principal, notée $\overrightarrow{R}_{\text{air} \rightarrow \text{rp}}$, sachant que, dans le cas d'étude présent, les pales possèdent le même angle d'incidence.

II.2 Détermination de l'expression de la masse transportable

On suppose maintenant que le rotor est entraîné à vitesse constante à sa vitesse angulaire limite ω_{max} et que l'hélicoptère est initialement posé au sol avec un angle d'incidence des pales $\alpha = 0^\circ$. Le pilote actionne la commande dite « de pas collectif » pour augmenter progressivement l'angle α d'incidence des pales jusqu'à la limite du décollage. Dans ce cas, la portance, c'est-à-dire la composante sur \vec{z} de $\overrightarrow{R}_{\text{air} \rightarrow \text{rp}}$ supporte totalement le poids de l'appareil chargé au maximum. La masse de l'appareil est alors $M_{\text{totale}} = M_{\text{vide}} + M_{\text{transportable}}$.

La masse à vide M_{vide} de l'hélicoptère est de 683kg.

- Q4.** Donner l'expression de la masse $M_{\text{transportable}}$ que l'hélicoptère peut déplacer en fonction de M_{vide} et des autres paramètres du problème.

Dans les domaines comme l'aéronautique et plus généralement lorsqu'il y a transport de personnes, on applique de forts coefficients de sécurité. Ceux-ci parent à toute utilisation non prévue (hypothèses d'étude, défaillance d'une pièce, évènement extérieur imprévu, etc.) ou inadaptée (imprudence de l'utilisateur, surcharge accidentelle, etc.). Ici, le coefficient appliqué est :

$$s = \frac{M_{\text{transportable théorique}}}{M_{\text{transportable réelle}}} = 8$$

- Q5.** En déduire l'expression de la masse transportable réelle, $M_{\text{transportable réelle}}$.

II.3 Détermination de la vitesse de rotation maximale du rotor principal

Le rotor, entraînant les pales de rayon $R = 5\text{m}$, tourne par rapport à la cabine (ou fuselage) suivant l'axe vertical $(O; \vec{z})$.

Cette rotation relative est repérée par l'angle θ .

On considère qu'il n'y a pas de vent extérieur : $\overrightarrow{V}_{M \in \text{air}/\text{sol}} = \vec{0} \quad \forall M$

- Q6.** Exprimer la vitesse d'un point P de la pale par rapport à la cabine dans cette configuration, tel que P soit distant de r de l'axe de rotation du rotor principal : $\overrightarrow{OP} = r.\vec{y}_r$
- Q7.** En déduire la vitesse du vent apparent au point P , c'est-à-dire la vitesse de l'air par rapport à la pale en fonction de la distance r et de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ de rotation de l'axe. On rappelle que l'on se place à la limite du décollage, donc que la vitesse de l'appareil par rapport au sol est nulle.

En pratique, le pilote doit contrôler la vitesse de rotation de la voilure, grâce à une modulation de la puissance fournie par le moteur, afin de maintenir la vitesse de l'extrémité des pales par rapport à l'air significativement en dessous de la vitesse du son, valant $c = 340\text{m/s}$ au niveau de la mer dans les conditions normales. On limite donc la vitesse de l'écoulement d'air à $V_{\max} = 0,6.c$ en bout de pale.

Q8. Déterminer la vitesse de rotation maximale ω_{\max} autorisée pour éviter de dépasser la vitesse V_{\max} en bout de pale.

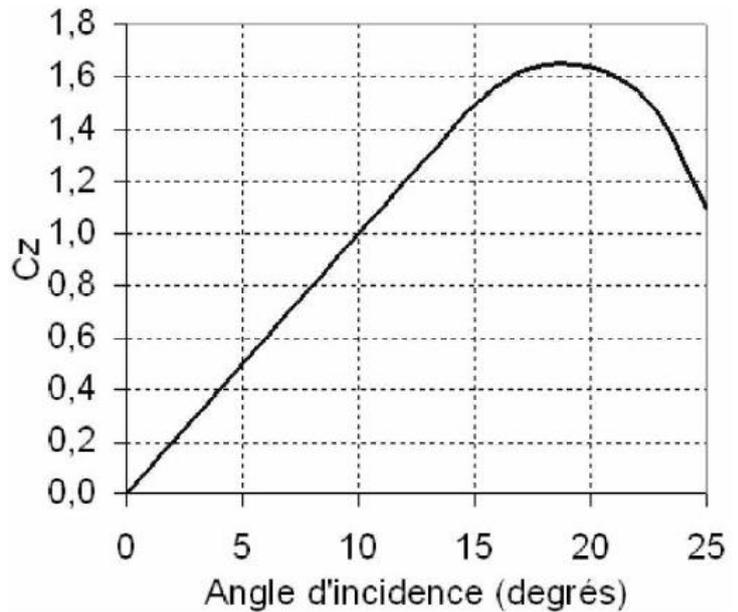
II.4 Détermination du coefficient de portance

La loi d'évolution du coefficient de portance C_z en fonction de l'angle d'incidence α est présentée sur la figure ci-contre.

Q9. Quelle est la valeur maximale de $C_z(\alpha)$?

II.5 Conclusion

Q10. A partir des questions précédentes, conclure vis-à-vis du cahier des charges. On prendra $g = 9.81\text{ m/s}^2$.



III. Vérification de la longueur de queue

III.1 Mise en évidence de la problématique

Q11. En reprenant le paramétrage de la partie II.1, exprimer le moment élémentaire en O des efforts élémentaires de l'air sur la pale.

Q12. Montrer que le moment résultant en O des moments élémentaires de l'air sur une pale s'écrit :

$$\overrightarrow{M_{O,air \rightarrow pale}} = \frac{3.R}{4} A. (C_z(\alpha)\vec{x}_r - C_x(\alpha)\vec{z}) \text{ où } A \text{ est le coefficient déterminé en Q2.}$$

Q13. En déduire le moment total en O exercé par l'air sur les deux pales du rotor principal, noté :

$$\overrightarrow{M_{O,air \rightarrow rp}}$$

Q14. Commenter physiquement et de façon qualitative ce résultat en interprétant l'équilibre de l'hélicoptère.



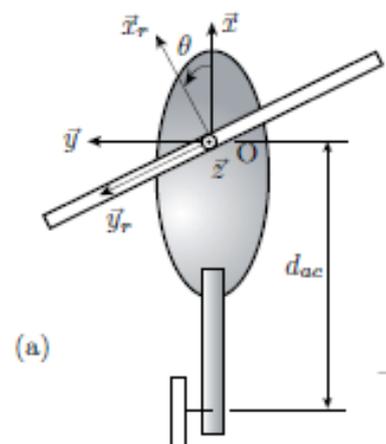
Pour contrer cet effet, plusieurs techniques existent. La plus courante est celle utilisée sur le Robinson R44 Raven II, qui utilise un second rotor, nommé rotor arrière, rotor de queue ou encore rotor anti-couple (voir photo ci-contre).

Disposé à l'extrémité de la queue de l'appareil, il est monté dans un plan vertical. Ainsi, la portance engendrée par l'action de l'air sur celui-ci se situe dans un plan horizontal.

L'objectif de cette partie est de vérifier la pertinence de la distance entre les axes des rotors principal et anti-couple, nommée longueur de queue et notée d_{ac} qui vaut ici 6m.

III.2 Détermination du moment induit au niveau du rotor principal par la résultante de l'action de l'air sur le rotor anti-couple

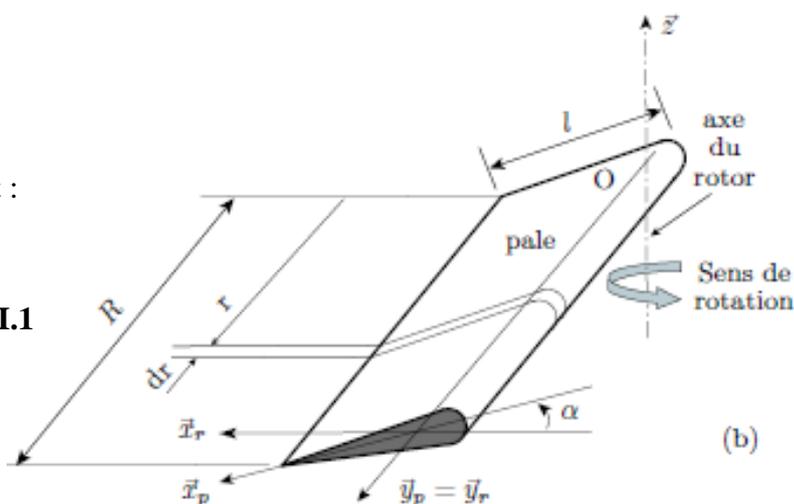
La portance et la traînée du rotor anti-couple sont données par les mêmes expressions que pour le rotor principal. Comme pour ce dernier, la vitesse angulaire du rotor anti-couple est constante et proportionnelle à celle du rotor principal selon $\omega_{ac} = \lambda \cdot \omega$ avec $\lambda = 6,66$. Seul change l'angle d'incidence des pales, α_{ac} , commandé par le pilote grâce aux palonniers.



Les dimensions des pales du rotor anti-couple sont :

- $R_{ac} = 75$ cm leur longueur
- $l_{ac} = 10$ cm leur largeur

avec les mêmes notations que sur la figure partie II.1



On néglige toute interaction aérodynamique entre les deux rotors et entre les pales elles-mêmes.

Q15. En reprenant le résultat de la question Q3, déterminer l'expression de la norme de l'action de l'air sur les pales du rotor anti-couple, notée $\|\vec{R}_{air \rightarrow rac}\|$.

Q16. Quel moment $\|\vec{M}_{(O, \vec{R}_{air \rightarrow rac})}\|$ induit alors cette résultante sur l'axe du rotor principal ?

III.3 Conclusion

Q17. A partir des questions précédentes, déterminer l'expression du bras de levier d_{ac} traduisant le rôle du rotor anti-couple, en fonction de λ , l , R , l_{ac} , R_{ac} , $C_x(\alpha)$ et $C_z(\alpha_{ac})$.

Le coefficient de traînée $C_x(\alpha)$ est obtenu expérimentalement. Le cas le plus défavorable est celui pour lequel ce coefficient est maximal. D'après l'expérience, on a alors $C_x(\alpha)_{max} = 14,6 \cdot 10^{-2}$.

Le coefficient de portance créé par le rotor anti-couple doit alors lui aussi être maximal.

Il vaut ainsi $C_z(\alpha_{ac})_{max} = 1,65$.

Q18. Faire l'application numérique dans le cas limite décrit. Cette valeur est-elle conforme au choix fait par le constructeur ?

Problème 2 : Doseur pondéral de granules plastiques (extrait Mines MP 08)

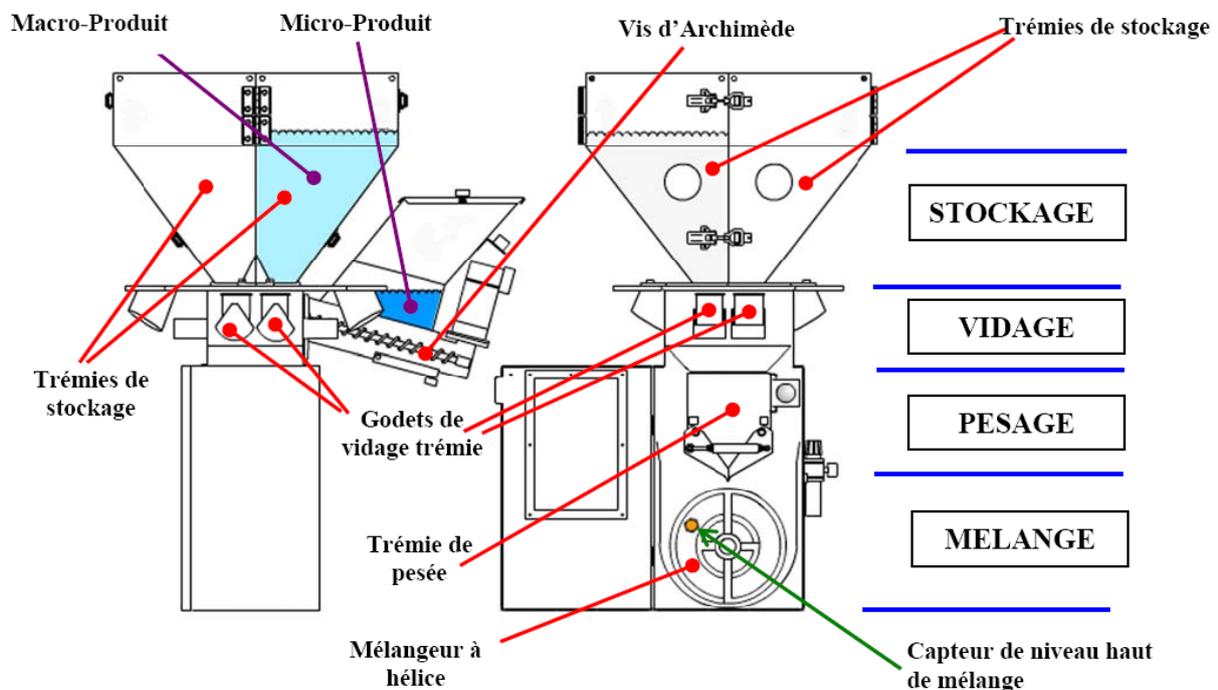
L'injection de matière plastique est une technique qui consiste à pousser de la matière plastique chauffée dans un moule afin de réaliser une pièce. La machine qui réalise cette opération est appelée « **presse à injecter** »



Exemple de produits réalisés : bacs translucides colorés

Doseur pondéral DPX

La matière plastique « première » sous forme de différents granulés (produits principaux : macro-produits et colorants : micro-produits) est conservée dans des silos de grande taille. Le transport de ces matières vers les presses est réalisé automatiquement au moyen de canalisations et d'aspirateurs dans des trémies de stockage situées au-dessus d'un **doseur pondéral** qui permet le **dosage** et le **mélange** des granulés.



Extrait du cahier des charges

Exigence technique	critères	valeurs
Mesurer le poids de granulés présents dans la trémie quel que soit leur « arrangement »	Précision	2%
	Position du centre de gravité	inconnue

Validation de l'exigence technique : Mesurer le poids de granulés

On souhaite mesurer le poids de la trémie de pesage, soit la résultante P du torseur :

$$\{T_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{trémie}}\} = \left\{ \begin{array}{l} -P \cdot \vec{y} \\ 0 \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_G \quad \text{avec } G : \text{centre de gravité de la trémie}$$

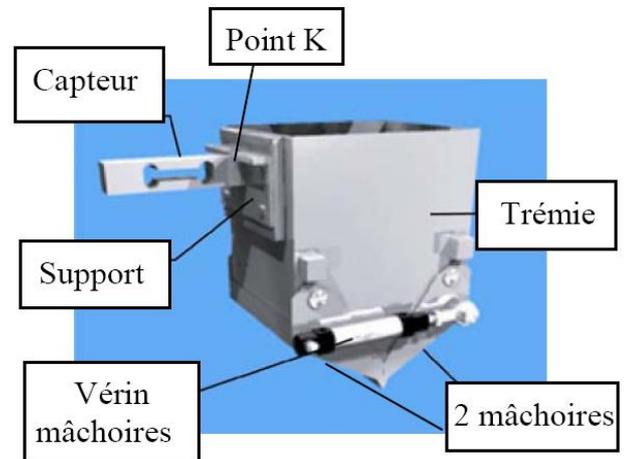
Un capteur visible sur la figure ci-contre supporte la trémie.

Un de ses cotés est lié au bâti de la machine, son autre coté étant accroché en un point K à la trémie.

Lors de la chute des granulés, le **centre de gravité** de la masse des granulés occupe une **position variable et inconnue**.

Le torseur des actions mécaniques exercées par la trémie sur le capteur peut s'écrire :

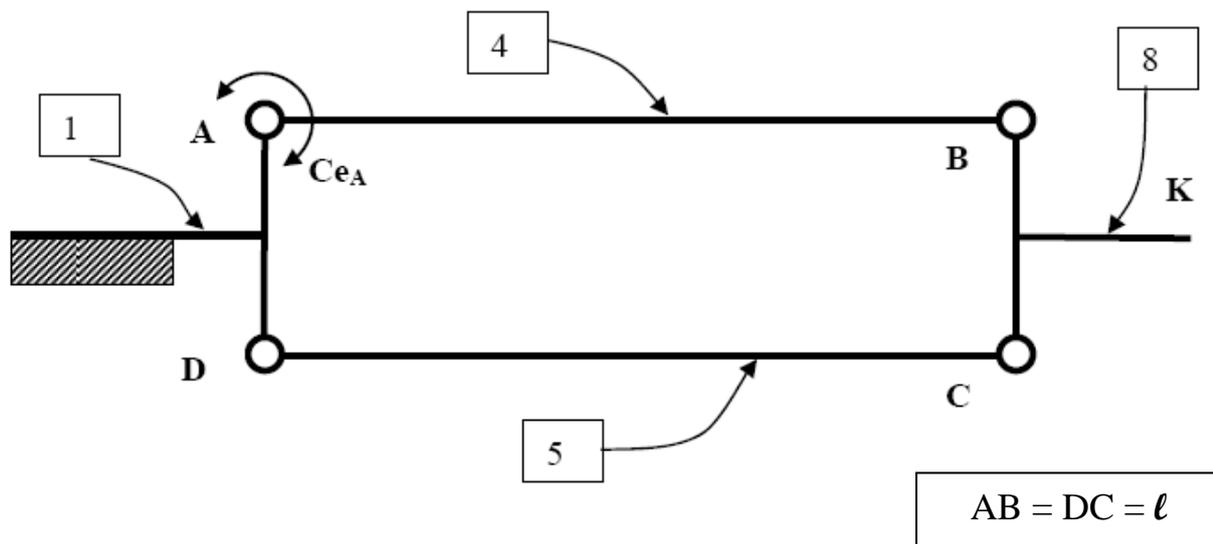
$$\{T_{\text{trémie} \rightarrow \text{capteur}}\} = \left\{ \begin{array}{l} -P \cdot \vec{y} \\ M_K \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_K$$



Le capteur réel peut être modélisé par une structure parallélogramme 4 barres liées par 4 liaisons pivots élastiques (voir figure donnée en annexe).

Pour que la mesure donnée par le capteur soit indépendante de la position de G , le comportement du capteur ne doit pas dépendre du moment M_K .

Pour cela on va étudier dans un premier temps un modèle simplifié (figure ci-dessous) dans lequel seule la liaison pivot en A est une liaison pivot élastique, les autres liaisons pivot en B, C, D étant parfaites.



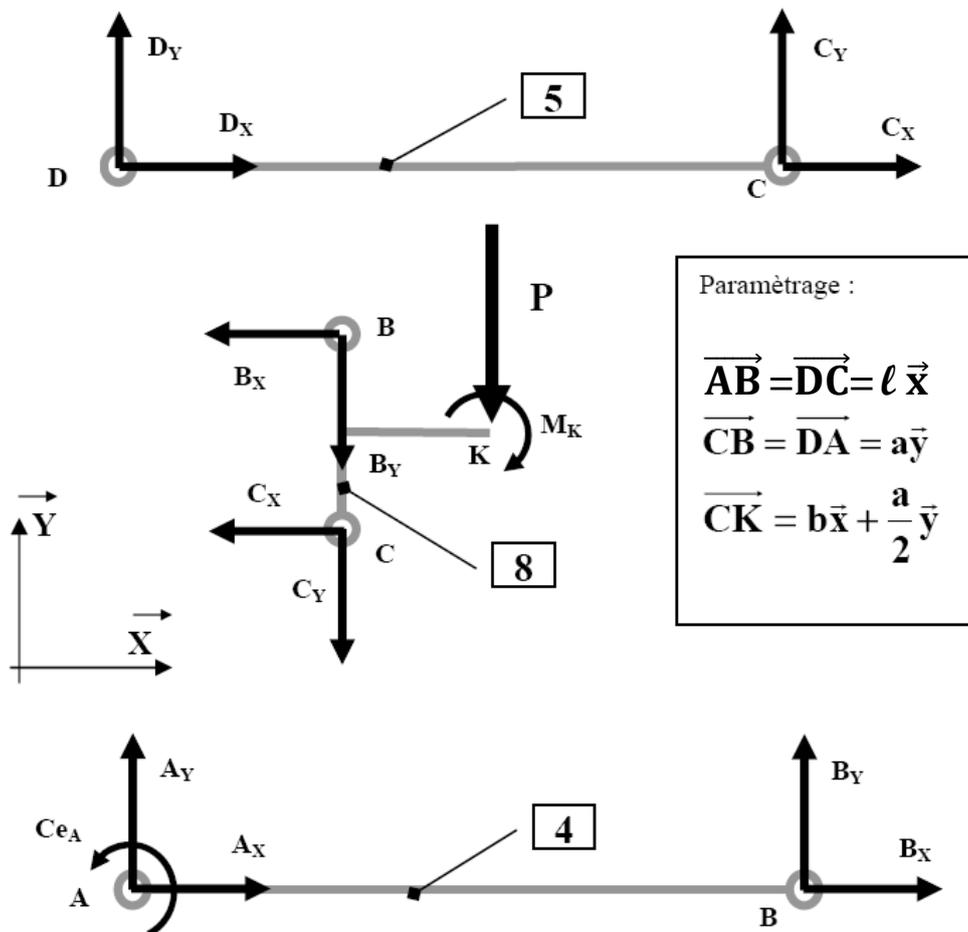
Le torseur de la liaison pivot élastique s'écrit :

$$\{T_{1 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{l} A_x \cdot \vec{x} + A_y \cdot \vec{y} \\ C_{eA} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

La technologie du capteur permet de mesurer C_{eA} . On souhaite donc vérifier qu'il existe une relation $P=f(C_{eA})$ indépendante de M_K .

Le problème est supposé plan. On suppose que les poids des éléments constitutifs du capteur sont négligés par rapport aux autres actions mécaniques exercées.

La figure ci-dessous donne les Bilans d'Actions Mécaniques Extérieures à $\{5\}$, $\{8\}$ et $\{4\}$.



Q1- En isolant successivement $\{5\}$, $\{8\}$ et $\{4\}$, trouver la relation $P=f(CeA)$.

Le capteur d'efforts utilisé (cf annexe) est en réalité constitué de 4 zones rigides 1, 8, 4 et 5 reliées par 4 zones déformables 2, 3, 6 et 7 que l'on peut modéliser par quatre liaisons pivots élastiques. On retient un modèle d'étude plan et les torseurs d'efforts transmissibles dans chacune des liaisons pivots non parfaites peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \{T_{1 \rightarrow 4}\}_{liaison3} &= \begin{Bmatrix} A_x \cdot \vec{x} + A_y \cdot \vec{y} \\ C_{eA} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A ; & \{T_{8 \rightarrow 4}\}_{liaison7} &= \begin{Bmatrix} B_x \cdot \vec{x} + B_y \cdot \vec{y} \\ C_{eB} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_B ; \\ \{T_{8 \rightarrow 5}\}_{liaison6} &= \begin{Bmatrix} C_x \cdot \vec{x} + C_y \cdot \vec{y} \\ C_{eC} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_C ; & \{T_{1 \rightarrow 5}\}_{liaison2} &= \begin{Bmatrix} D_x \cdot \vec{x} + D_y \cdot \vec{y} \\ C_{eD} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_D \end{aligned}$$

L'action de la trémie sur le capteur est modélisée par le torseur : $\{T_{trémie \rightarrow 8}\} = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{y} \\ M_K \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_K$

Des jauges de déformation, qui sont constituées de fins fils résistants collés dans la zone déformable 3, permettent de mesurer la valeur de CeA , ce qui permet de déterminer P .

Pour dimensionner le capteur il est donc nécessaire de déterminer la relation entre P et CeA dans le cas de cette deuxième modélisation beaucoup plus proche du capteur réel.

Hypothèse :

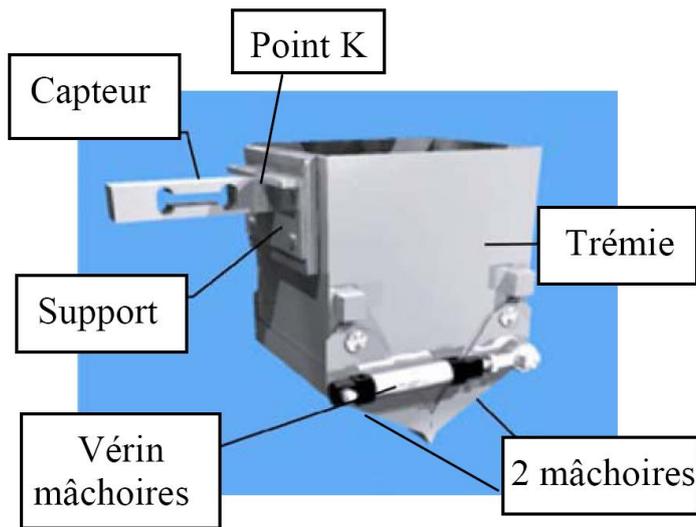
Les couples élastiques sont supposés proportionnels aux déformations élastiques en A, B, C et D.

On peut donc supposer que ces couples sont égaux : $C_{eA} = C_{eB} = C_{eC} = C_{eD} = C_e$

Q2- Déterminer la relation entre P et C_e pour cette nouvelle modélisation du capteur.

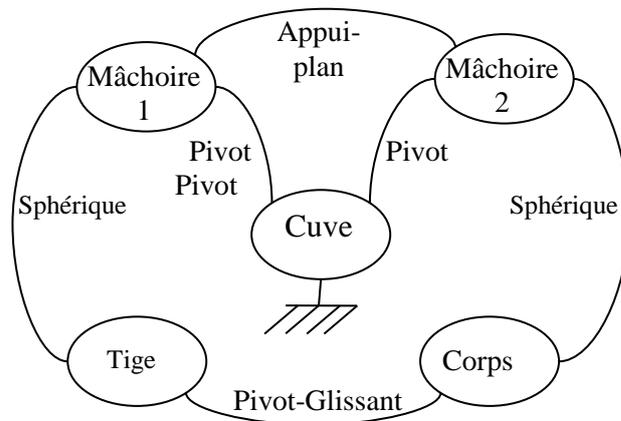
Étude d'une exigence non spécifiée : Vider la trémie de pesage

Sur les machines de petite capacité un dispositif à mâchoires, représenté ci-dessous, est retenu.

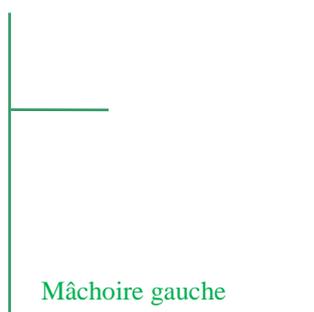


Les deux mâchoires sont en liaison pivot avec la cuve. En position fermée (figure de gauche) on modélise la liaison entre les deux mâchoires par une liaison appui plan. Un seul vérin actionne l'ouverture et la fermeture des mâchoires. La tige du piston du vérin et le corps du vérin sont respectivement en liaison sphérique avec chacune des deux mâchoires.

On donne le graphe de structure du dispositif étudié.

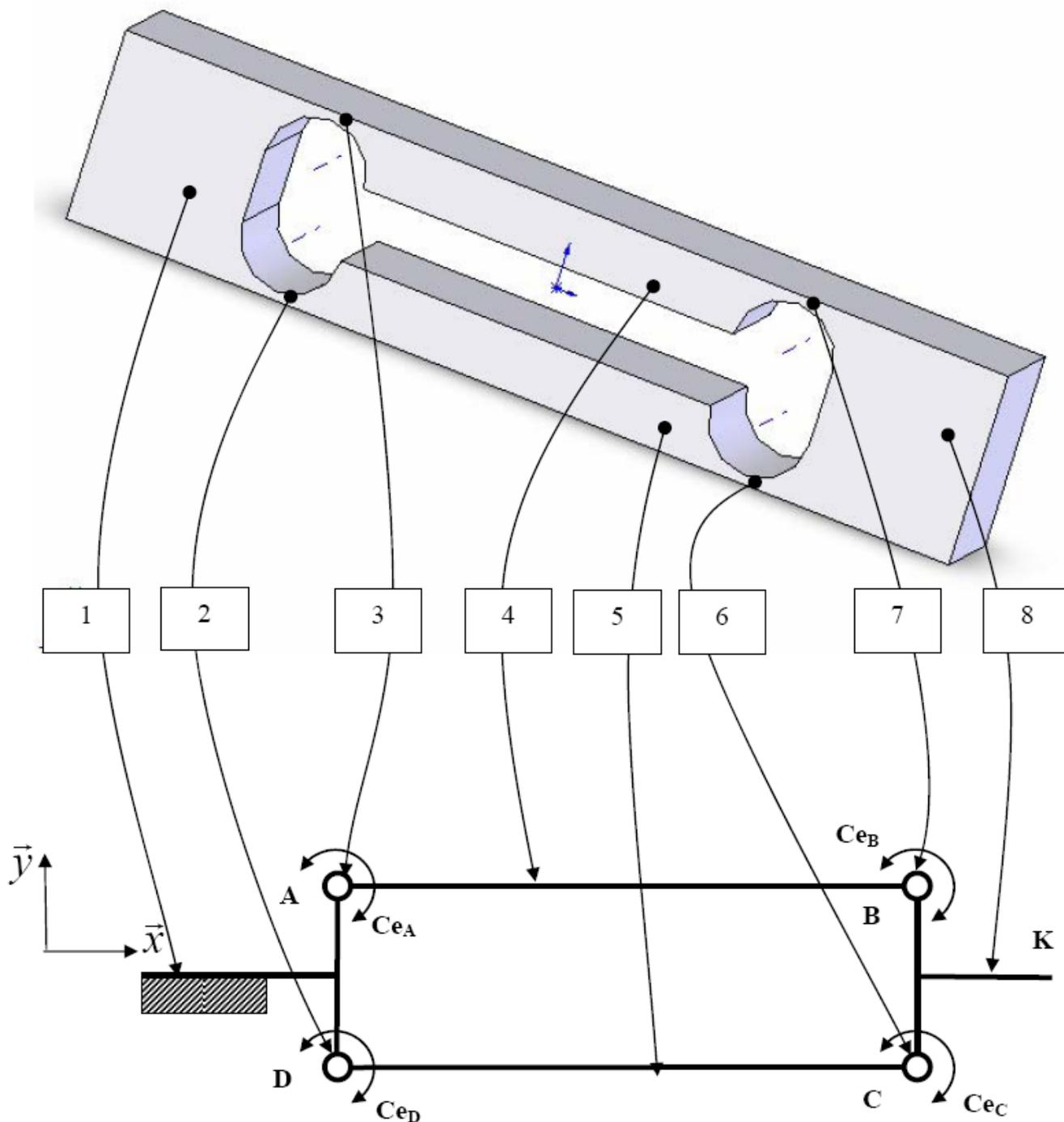


Q3- Compléter le schéma cinématique plan ci-dessous. il sera représenté dans la position « mâchoires fermées ».



ANNEXE

LE CAPTEUR D'EFFORTS ET SON MODELE PLAN 2D



- | | | | | |
|---|--|---|---|---|
| 1 | Partie rigide liée au bâti | | | |
| 8 | Partie rigide liée à l'élément chargé (cuve) dont on veut mesurer le poids P | | | |
| 2 | 3 | 6 | 7 | Parties déformables <u>identiques</u> modélisées par des liaisons pivots élastiques |
| 4 | 5 | Parties rigides modélisées par des barres | | |

Problème 3 : Robot de pose de fibre optique (extrait Mines MP 04)

L'installation des réseaux souterrains de télécommunication par fibres optiques nécessite d'importants travaux de voirie : découpe de la chaussée, creusement de tranchées, pose de canalisation, réhabilitation de la chaussée. Outre le prix de revient important de l'opération, cette technique provoque une gêne évidente au niveau de la circulation urbaine.

La société suisse KA-TE SYSTEM propose une solution originale pour éviter ces inconvénients : il s'agit d'emprunter les canalisations existantes (égouts) et de confier la mise en place des fibres optiques à un robot (voir figures 1 et 2).

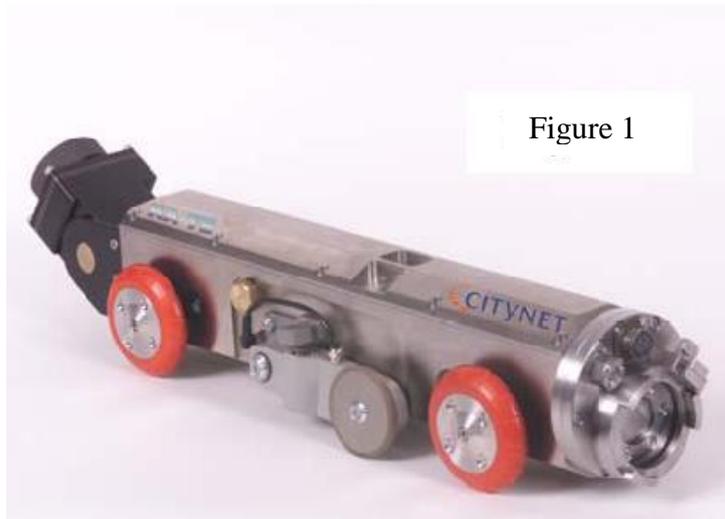


Figure 1



Figure 2

Direction du robot :

Le robot possède deux essieux rigides non orientables. Si le système est parfait (géométrie et contact), l'axe du robot se trouve dans le plan de symétrie vertical de la canalisation lorsque celle-ci est rectiligne. De part les défauts de géométrie et de contact, le robot prend une orientation légèrement différente et monte sur la paroi de la canalisation jusqu'au moment où il va glisser pour revenir au fond de celle-ci. Ce comportement sera identique lorsqu'il y aura changement d'orientation de l'axe de la canalisation.

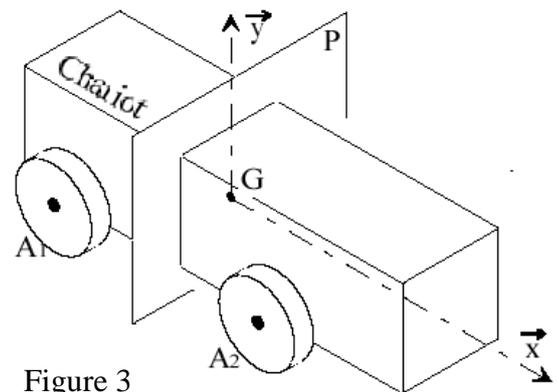


Figure 3

Hypothèses :

- En position initiale, l'axe \vec{GX} du robot est parallèle à l'axe de la canalisation \vec{X}_0 et contenu dans le plan (\vec{X}_0, \vec{Y}_0) (voir figure 5)
- Les 4 roues sont en contact avec la canalisation
- L'étude sera menée dans le plan P, perpendiculaire à l'axe de la canalisation et contenant le centre de gravité G du robot
- Les points A et B représentent les contacts des roues avec le sol ramenés dans le plan de l'étude (voir Figures 3 et 4)
- Les contacts en A et B sont des contacts ponctuels avec frottement

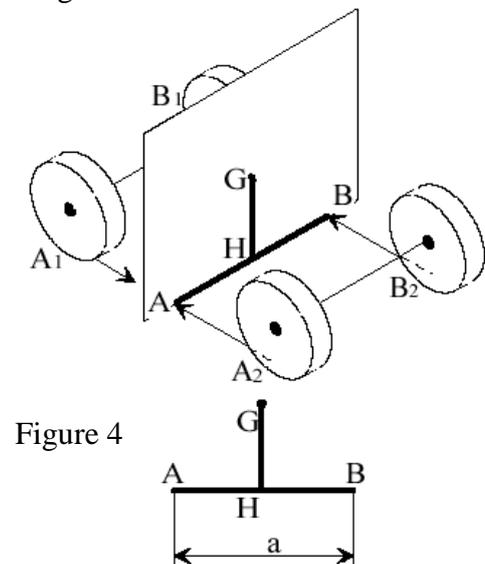


Figure 4

Données :

- Coefficient de frottement en A et B : $f = 0,2$
- Distance entre les points de contact : $a = 0,12\text{m}$
- Rayon de la canalisation : $R = 0,25\text{m}$
- Position du centre de gravité G : $HG = 0,06\text{m}$ (H milieu de AB)
- G_1 est la position limite du centre de gravité G (voir figure 5)
- L'angle α est l'inclinaison maximum du robot.

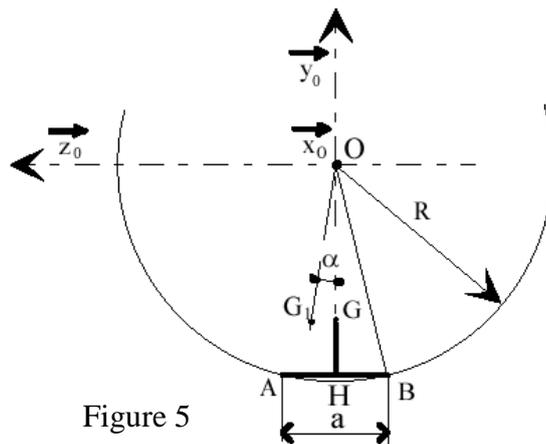


Figure 5

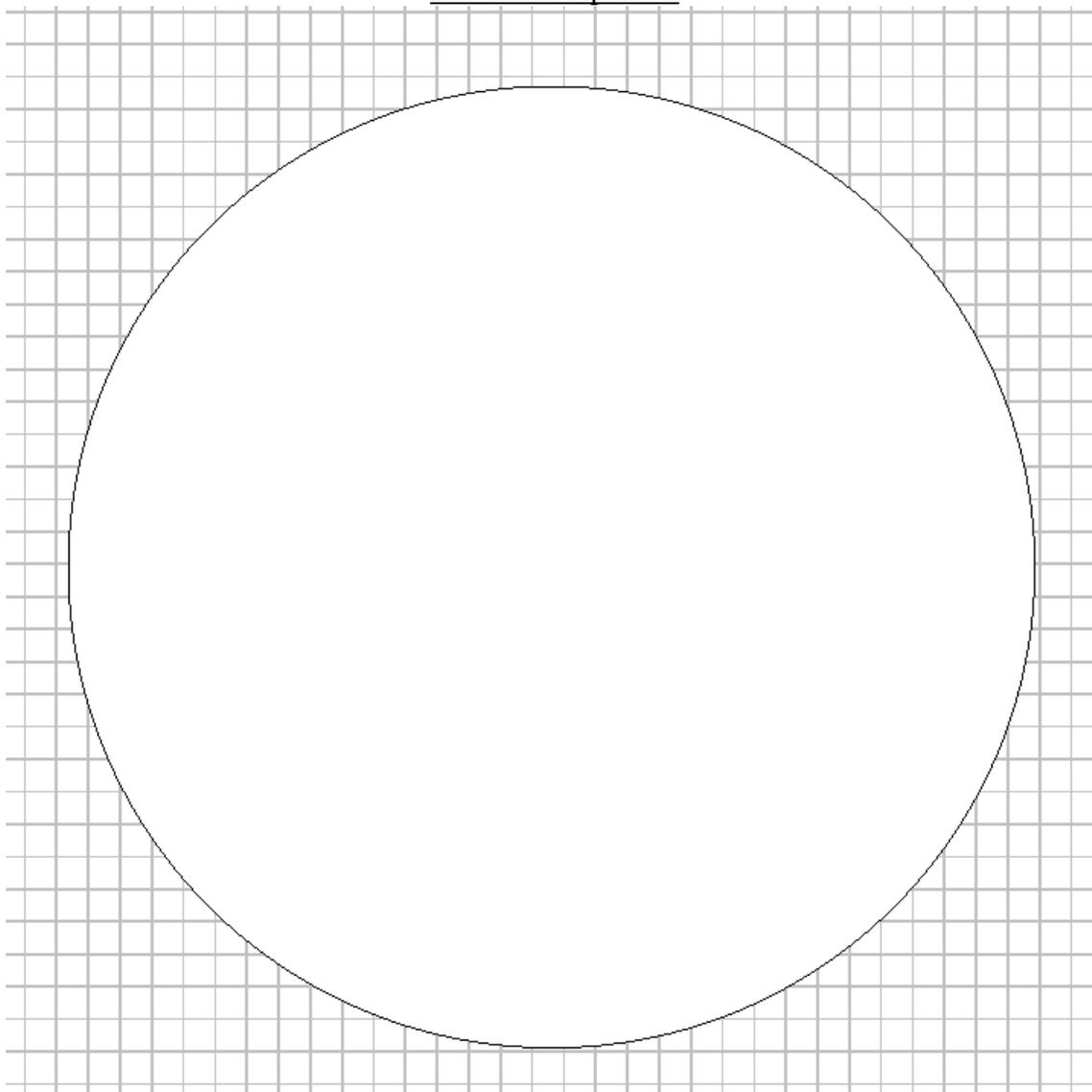
Extrait du cahier des charges

exigence	critères	valeurs
Assurer le déplacement du robot dans les canalisations existantes et éviter son basculement	Inclinaison du chariot par rapport à la verticale	$\alpha < 20^\circ$

Question :

Par une étude de statique graphique sur le document réponse ci-dessous, déterminer l'inclinaison maximum α du robot. Conclure quant au respect du cahier des charges.

Document réponse :



Problème 4 : Chargement/déchargement de cargos porte-conteneurs (extrait Centrale PSI 13)

Performances et architecture des grues

Le rôle des ports dans le transport mondial des marchandises

Le transport des marchandises (hydrocarbures, charbon, agroalimentaire, ciment, matériaux de construction, biens de consommation ...) à travers le monde est incontournable dans l'économie moderne. Excepté les matières premières, ces marchandises sont envoyées par conteneurs. Au port de Marseille (premier port français), 950 000 conteneurs transitent chaque année, soit 9 millions de tonnes de marchandises et 1 300 navires.

Les conteneurs sont des boîtes standardisées, d'une masse maximale de 40 tonnes, permettant de transporter des marchandises du fournisseur au client par navire, train, camion, voire par avion, sans déballer la marchandise. Les navires « post-panamax » sont les plus gros navires de transport et peuvent embarquer jusqu'à 13 000 conteneurs.



Figures 1 et 2 Cargo porte-conteneurs et grues de chargement-déchargement

Pour rejoindre sa destination finale, un conteneur changera plusieurs fois de navire. Il sera déchargé puis rechargé par des grues dans des plateformes portuaires, véritables « hubs » du réseau maritime.

Le temps d'immobilisation des navires à quai est donc un paramètre important du coût du transport. Ainsi les deux prestations principales attendues pour la grue sont la sécurité des hommes et des marchandises et la cadence de transfert. Le tableau ci-dessous donnent les caractéristiques du cahier des charges partiel de la phase de déchargement.

Exigence	Critère	Niveau
Déplacer les conteneurs du navire vers les camions de transfert	Masse maximale du conteneur	40 tonnes
	Altitude des conteneurs sur le navire par rapport au quai	-13 m à 40 m
	Longueur × largeur du navire	400 m × 50 m
	Précision du positionnement du conteneur	10 cm
Assurer la sécurité du contenu du conteneur	Accélération maximale du conteneur (verticale × horizontale)	1 g × 0,5 g
Fonctionner malgré des conditions météorologiques difficiles	Stabilité du portique	Aucun renversement
	Plage de vitesse de vent autorisant les activités portuaires de déchargement	0 à 120 km · h ⁻¹
	Vitesse maximale du vent mesurée au cours des 100 dernières années	300 km · h ⁻¹
Assurer une cadence de transfert suffisamment rapide	Cadence	2 min par conteneur en moyenne

Tableau 1 Cahier des charges partiel de la grue de chargement/déchargement

L'objet de ce sujet est la validation de quelques-unes des performances qui contribuent à la réalisation de ces prestations.

Architecture d'une grue et performances souhaitées des nouvelles motorisations

Les grues (voir figure 3) sont constituées d'un portique (structure métallique) dont les quatre pieds peuvent se déplacer sur deux rails, d'un chariot de levage et d'un « spreader », situé à l'extrémité des câbles, permettant de s'arrimer au conteneur par un verrouillage aux quatre coins supérieurs.

Chaque grue de déchargement assure trois mouvements principaux de translation du conteneur : un mouvement appelé « translation », horizontal et parallèle au quai (suivant \vec{x}), un mouvement appelé « direction », horizontal et perpendiculaire au quai (suivant \vec{y}) et un mouvement de « levage », vertical (suivant \vec{z}).

Le mouvement de *translation* est assuré par quatre moteurs implantés dans chaque pied de la grue (soit 16 moteurs au total), permettant à l'ensemble de la grue de se déplacer le long de deux rails. Le mouvement de *direction* est assuré par un chariot motorisé se déplaçant sur le portique. Le mouvement de *levage* est assuré par un treuil et un moufle de douze câbles.

Éléments détaillés du cahier des charges

- **translation** : vitesse maximale $V_{tm} = 0.75 \text{ ms}^{-1}$, accélération maximale $\gamma_{tm} = 0.1 \text{ ms}^{-2}$. La masse du portique vaut $M_p = 1080 \text{ tonnes}$;
- **direction** : vitesse maximale $V_{dm} = 2.5 \text{ ms}^{-1}$, accélération maximale $\gamma_{dm} = 0.6 \text{ ms}^{-2}$ pour un chariot de masse $M_{ch} = 27 \text{ tonnes}$;
- **levage** : vitesse maximale $V_{lmv} = 1.65 \text{ ms}^{-1}$ à vide (c'est-à-dire sans conteneur) et $V_{lmp} = 0.75 \text{ ms}^{-1}$ avec un conteneur de masse $M_c = 40 \text{ tonnes}$ et un spreader de masse $M_s = 10 \text{ tonnes}$, accélération maximale $\gamma_{lm} = 0.5 \text{ ms}^{-2}$.

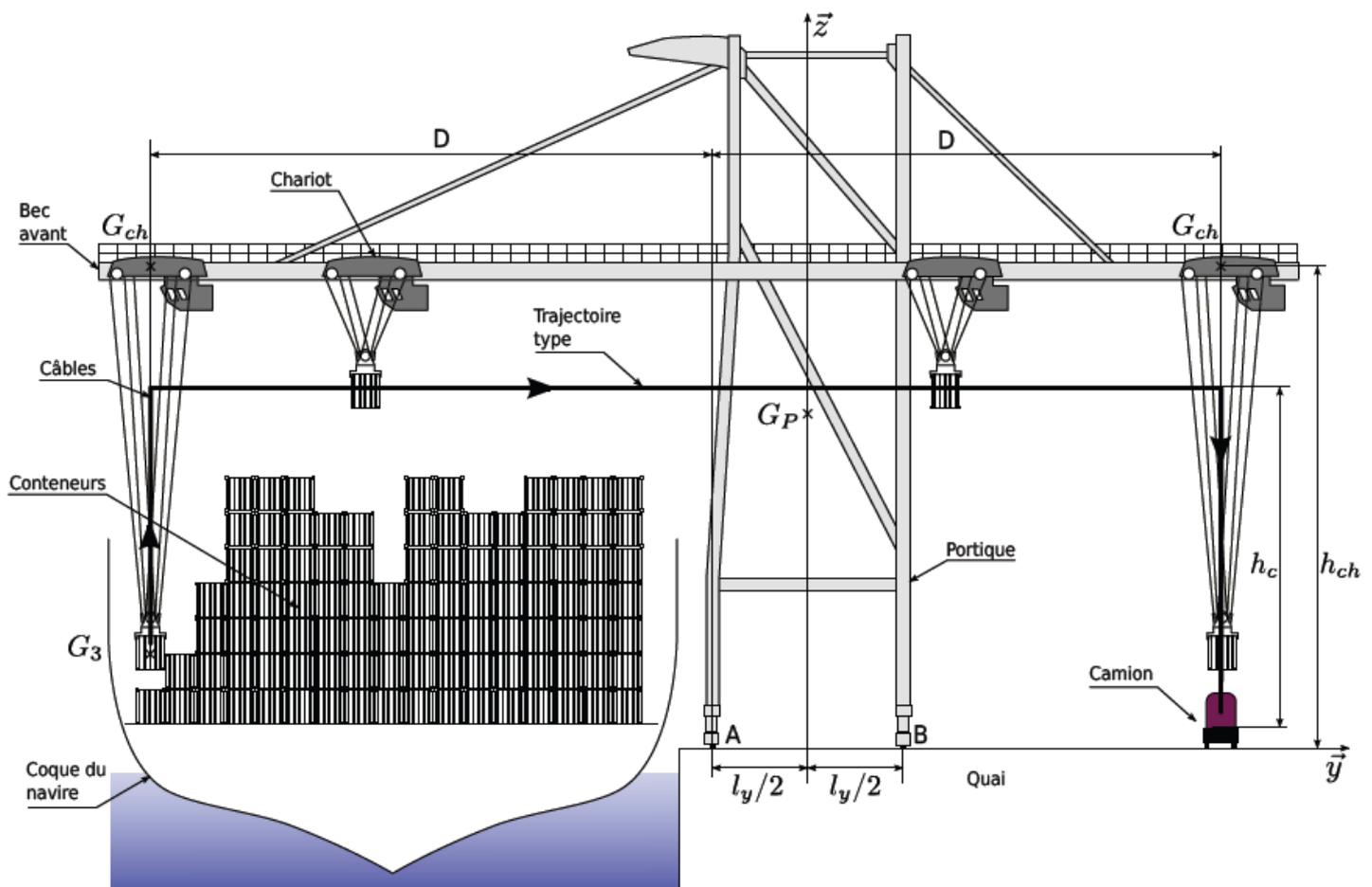
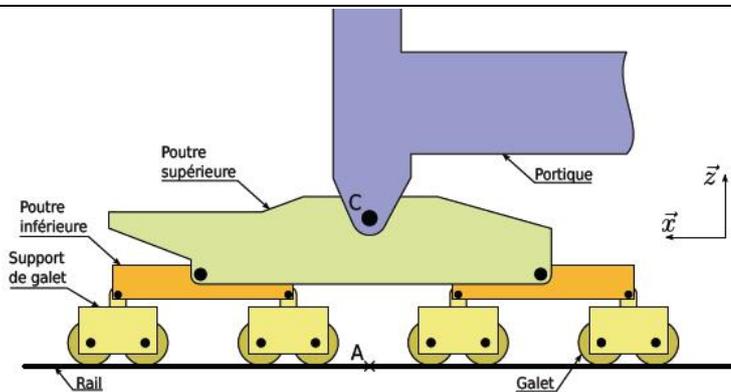


Figure 3 Grue de déchargement des conteneurs



Architecture d'un pied de la grue (chaque disque noir représente une liaison pivot)



Photographie du pied de grue (le tambour supérieur permet l'enroulement du câble d'alimentation 20 000 V)

Figure 4 Pied de grue

Stabilité du portique sur ses appuis

Objectif : Évaluer le risque de basculement lorsque le portique est soumis au vent et lors du levage d'un conteneur.

La forme très élancée du portique présente des risques de basculement lors de la manipulation des conteneurs les plus lourds et par grand vent. Il s'agit de lever ces risques.

Le centre de gravité du portique seul est noté G_P , le centre de gravité du chariot G_{ch} et le centre de gravité de l'ensemble {spreader et conteneur} G_3 .

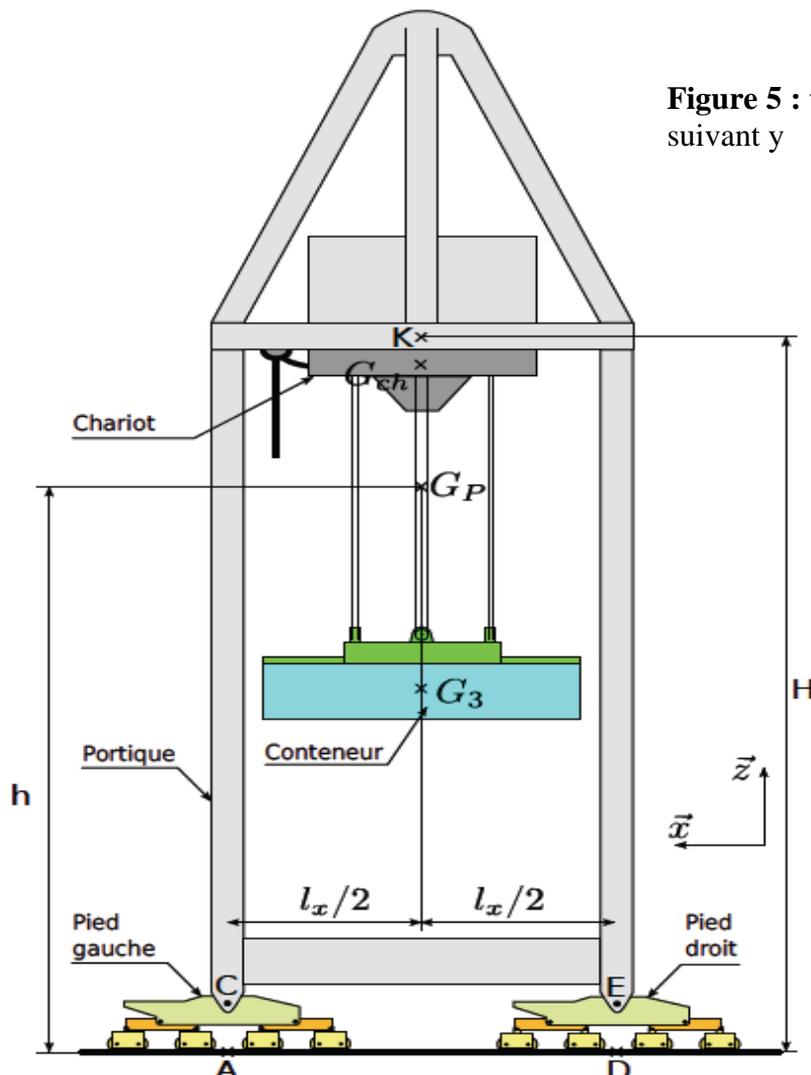


Figure 5 : vue du portique suivant y

$$\begin{aligned} H &= 32 \text{ m} \\ h &= 25 \text{ m} \\ h_c &= 26 \text{ m} \\ l_x &= 17 \text{ m} \\ l_y &= 15 \text{ m} \\ D &= 40 \text{ m} \end{aligned}$$

Q1. Lorsque le chariot est en bout de bec avant (voir figure 3, la distance D vaut 40 m) et que l'on tente de lever la charge maximale, déterminer littéralement, dans le cadre d'un problème plan (dans le plan (y,z) de la figure 3), les efforts dans les contacts rails/portique, modélisés par des liaisons ponctuelles en A et B (supposées sans frottement). Faire les applications numériques.

Donner la condition de non basculement de la grue. Cette condition est-elle vérifiée ?

Q1 bis : (facultatif) dans le cas de la levée de la charge maximale à accélération constante maximale

$\gamma_{lm} = 0,5 \text{ ms}^{-2}$, Déterminer littéralement et numériquement l'action en B. Y a-t-il basculement du portique ?

Quelle est l'accélération de levage maximale que peut subir le conteneur entraînant un début de basculement du portique ?

La grue doit pouvoir se déplacer normalement en translation dans une plage de vents de 0 à 120 kilomètres par heure.

Elle ne doit jamais basculer (vitesse maximale du vent mesurée au cours des 100 dernières années : $300 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$).

La prise au vent latérale est très forte et sera modélisée par une force : $\vec{F}_{vent} = \frac{1}{2} \lambda V^2 \vec{x}$ appliquée en K (figure 5), avec $\lambda = 800 \text{ N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}^{-2}$.

Hypothèses :

- le mouvement suivant \vec{z} du conteneur ne sera pas considéré
- le chariot et le portique sont immobiles
- la masse des poutres supérieures, inférieures et des supports de galets est négligeable devant M_p
- sur le modèle plan de la figure 5, les actions du sol sur la grue en A et D sont modélisées par des ponctuelles avec frottement.

Q2. Déterminer littéralement, dans le cadre d'une modélisation dans le plan (x,z) de la figure 5, les **efforts normaux du sol sur la grue** transmis par les pieds « gauche » et « droit », lorsque la grue est soumise au vent.

Q3. En déduire la valeur (en kmh^{-1}) de la vitesse de vent V_1 pour laquelle la grue bascule. En déduire la valeur (en kmh^{-1}) de la vitesse de vent V_2 pour laquelle la grue glisse, en considérant au contact roue/rail un modèle de frottement sec de coefficient $f = 0,2$.

Les cas les plus défavorables sont-ils obtenus avec ou sans conteneur ?

Vérifier si les deux derniers critères de la fonction FS3 du cahier des charges sont validés, et proposer le cas échéant des solutions techniques.

Problème 5 : Robot Romeo (extrait e3A MP 2014)

1. INTRODUCTION

Présentation du projet Roméo.

Roméo est un projet labellisé par le pôle de compétitivité Cap Digital et financé par la Région Ile-de-France, la Direction Générale de la Compétitivité, de l'Industrie et des Services (DGCIS) et la Ville de Paris.

Il vise à développer un robot humanoïde destiné à devenir un véritable assistant des personnes en perte d'autonomie. Pour cela, il doit être capable d'intervenir sur les objets du quotidien (ouvrir et fermer une porte, manipuler un verre, une bouteille, un trousseau de clés...). Mais il devra également aider une personne à se déplacer à domicile, et même lui porter secours en cas de chute.

Au-delà de ses capacités physiques, Roméo doit offrir une interface homme-machine accessible au plus grand nombre : la voix et les gestes doivent être les principaux moyens de communication avec le robot qui devra être capable de comprendre ce qu'on lui dit, d'entretenir un court dialogue et même de percevoir les intentions et les émotions de son interlocuteur pour en déduire les actions qu'il doit mettre en œuvre.

Un premier prototype de ce robot humanoïde a été développé en mars 2011. La seconde version devrait être opérationnelle courant 2014. À l'issue du projet, Romeo sera évalué auprès de patients de l'Institut de la vision.

Roméo, un robot d'assistance à la personne.

Le challenge est de faire de Roméo, un assistant pour une personne âgée, malvoyante et/ou en perte d'autonomie. Le robot peut aider tout au long de la

journée dans les tâches quotidiennes lorsque la personne est seule. Il peut aller chercher des objets qui se trouvent dans une autre pièce et ranger ceux qui ne sont pas à leur place, et rendre ainsi l'environnement d'une personne mal voyante, par exemple, moins accidentogènes. Roméo peut également être un assistant de mobilité en aidant la personne à marcher ou à se relever de son fauteuil.

Pour être accessible au plus grand nombre, Roméo offre une interface homme-machine très intuitive : il se commande à la voix. Il est capable de dialoguer avec son interlocuteur pour demander des précisions sur ce qu'on attend de lui. Il est également capable d'interpréter des gestes pour illustrer certains ordres.

1.1. Description structurelle

(Voir en annexe 1 : Définition dimensionnelle partielle du robot)

Le prototype en cours de finalisation mesure $1,43m$. Cette petite taille lui permet de limiter son poids à environ $40kg$ (batteries incluses) et donc d'être moins dangereux pour ses propres articulations et pour les personnes qui l'entourent. Ses proportions sont similaires à un individu de corpulence moyenne.

Concernant sa motricité, il est doté de :

- 4 actionneurs au niveau du cou ;
- 6 actionneurs dans chaque jambe ;
- 7 actionneurs dans chaque bras ;
- 1 articulation élastique passive sur chaque pied.

Au total, Roméo est composé de 32 moteurs à courant continu, répartis dans 4 catégories de puissances différentes ($11W$, $20W$, $60W$, $150W$).

Ses yeux sont aussi motorisés afin de modifier leurs orientations et ainsi augmenter leur champ visuel. Un projet de colonne vertébrale est à l'étude pour améliorer la flexibilité posturale de Roméo.

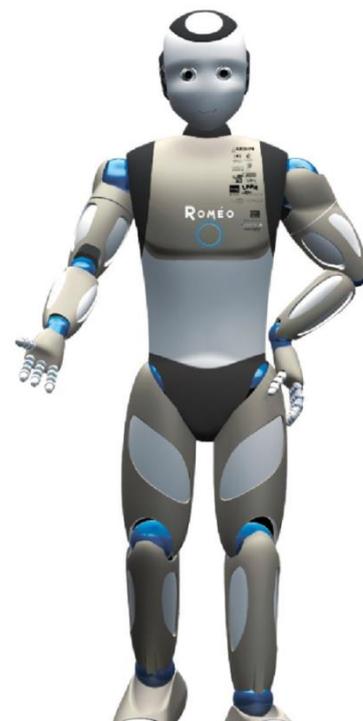


Figure 1 : Robot ROMEO, développé par la société ALDEBARAN ROBOTICS

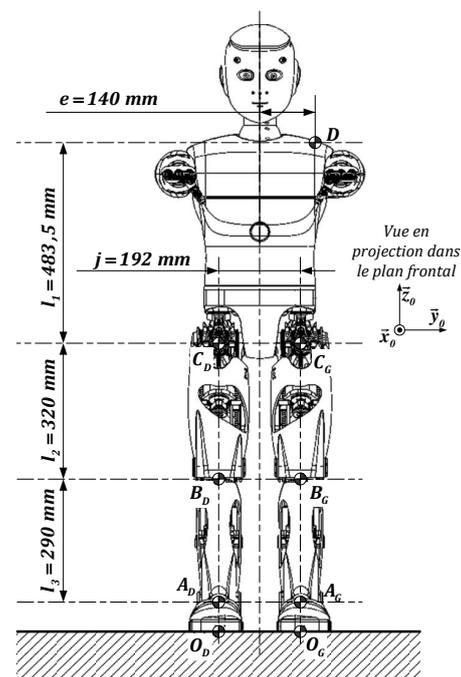


Figure 2 : Dimensions frontales

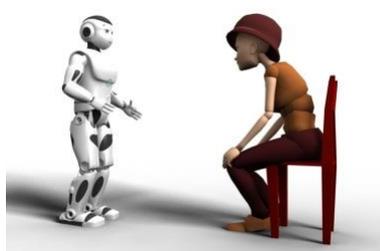
1.2. Scénario proposé

Nous allons étudier le robot dans une phase d'assistance spécifique qui consistera à aider une personne à se lever de sa chaise. Le protocole se décomposera de la façon suivante.

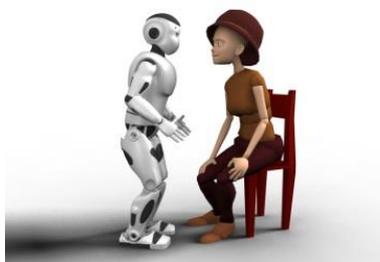
- La personne émet un appel vocal ou électronique du robot.
- Roméo se rapproche et se positionne correctement pour aider la personne.
- Roméo adapte la hauteur de son épaule grâce à une genuflexion.
- La personne pose une main sur l'épaule de Roméo pour s'aider de cet appui.
- Roméo contrôle ses articulations pour assurer son équilibre tout en soutenant l'effort de la personne.
- La personne lâche l'épaule du robot quand elle est levée.
- Roméo s'écarte de la personne tout en assurant sa sécurité.



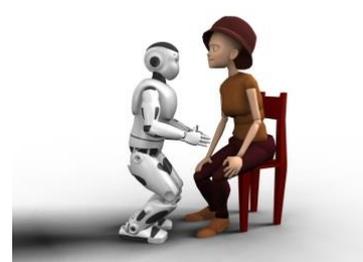
Figure 3 : Scénario d'assistance pour relever une personne



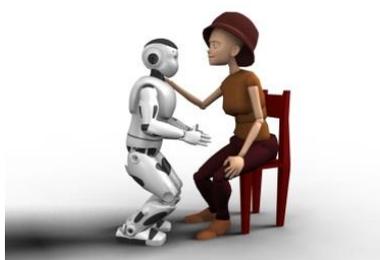
La personne émet un appel vocal ou électronique du robot



Roméo se rapproche et se positionne correctement pour aider la personne



Roméo adapte la hauteur de son épaule grâce à une genuflexion



La personne pose une main sur l'épaule de Roméo pour s'aider de cet appui



Roméo contrôle ses articulations pour assurer son équilibre tout en soutenant l'effort de la personne



Figure 4 : Étapes du scénario d'assistance pour relever une personne

1.3. Extrait du cahier des charges fonctionnel

Exigences	Formulation	Critères	Niveaux
Ex1	Aider le patient à se lever de sa chaise	Poids de la personne Temps d'exécution	< 100 Kg < 30 s
Ex2	S'adapter et protéger l'environnement	Largeur de passage	> 80 cm
		Eco-conception	CO ₂ minimum Consommation minimale
Ex3	S'adapter au mobilier environnant	Reconnaissance visuelle de l'encombrement de la chaise	±2 cm
Ex4	Charger sa batterie de manière autonome	Alimentation sur secteur	230 V~ < 15 A
Ex5	Communiquer avec le personnel médical	Dialogue vocal en français Dialogue via Smartphone ou tablette	

Figure 5 : Extrait du cahier des charges fonctionnel

1.4. Caractérisation des exigences techniques

Exigence technique	Critère	Niveau	Flexibilité
Ex1.1 : Permettre à la personne d'atteindre facilement l'épaule du robot avec sa main droite ou gauche	Distance optimisée vers l'avant (origine : épaule de la personne)	200 mm	2
	Distance optimisée sur le côté (origine : épaule de la personne)	200 mm	2
	Distance optimisée vers le haut (origine : sol)	900 mm	1
Ex1.2 : Supporter l'effort vertical exercé par la personne qui veut se lever d'un siège	Effort maximum	< 100 N	1
	Maintien de la position sous charge (variation de hauteur du point d'appui)	< 5 mm	2
	Dépassement de position face à un échelon de sollicitation	< 5%	2
	Temps de maintien d'un effort supérieur à 1N	< 10 s	2
Ex1.3 : Monter l'épaule d'appui afin d'aider la personne à se lever	Temps de montée maximal	15 s	2
	Temps de montée minimal	10 s	2
	Élévation nécessaire	< 150 mm	2

Figure 6 : Extrait du cahier des charges fonctionnel ; caractérisation des fonctions techniques

2. ETUDE DU CAHIER DES CHARGES FONCTIONNEL

La personne qui désire se lever est initialement en position assise. Elle positionne sa main droite ou sa main gauche sur l'épaule du robot (0,9 à 1,1 m de haut) puis exerce un effort vertical sur celle-ci afin d'aider ses membres inférieurs.

Afin d'établir la valeur de l'effort que devra supporter le robot pour assister la personne qui se relève, une série d'expériences est réalisée avec des personnes âgées. Un capteur de force monoaxial enregistre au cours du temps l'effort vertical qu'exerce la personne sur un support fixe représentant l'épaule du robot (voir exemple d'enregistrement d'essai en annexe 1).

Q1. Afin de choisir le capteur de force nécessaire à cette campagne de mesures, donner un ordre de grandeur de l'étendue de mesures nécessaire, ainsi qu'un ordre de grandeur de la précision requise.

L'étude qui suit porte sur la détermination des couples des moteurs installés dans les articulations des jambes du robot.

Un paramètre important est aussi la durée des couples d'application exercés par les moteurs : de ces temps de maintien dépendra l'échauffement des moteurs et donc la fiabilité du robot.

Q2. À partir d'un enregistrement de l'effort de relèvement en fonction du temps (simulé lors d'une expérience), donné en annexe 1, déterminer graphiquement le temps de maintien d'un effort supérieur à 10 N associée à cette courbe. Est-ce cohérent vis-à-vis du cahier des charges ?

3. VALIDATION DU CRITERE DE NON BASCULEMENT : exigence Ex1.2

Il est important de vérifier que le robot pourra réaliser le scénario proposé en s'assurant qu'il ne basculera pas suite à l'appui de la personne sur l'épaule.

Dans cette étude statique, on suppose toutes les articulations bloquées : les moteurs fournissent les couples de maintien nécessaires.

On propose le modèle simplifié, plan, de la **figure de l'annexe 2** : le robot (ensemble(E)) est en équilibre, les deux pieds en appui sur le sol auquel est associé un référentiel supposé galiléen.

- Les liaisons pieds / sol sont modélisées par deux liaisons sphère-plan (ou ponctuelles) parfaites aux points O_D et O_G (Droit et Gauche).
- L'effort de la personne sur le robot est modélisé par une force verticale $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$ appliquée au point D situé sur l'épaule comme défini par la figure de l'annexe 2 : $\overrightarrow{OD} \cdot \vec{y}_0 = e = 140 \text{ mm}$.
- La gravité exerce une force verticale $\vec{P} = -Mg \cdot \vec{z}_0$ appliquée au centre de masse G du robot.
- Le point O est situé à égale distance des deux pieds : $\overrightarrow{O_D O} = \overrightarrow{O O_G} = d \cdot \vec{y}_0$.

Notation : Pour la suite de l'étude, le torseur modélisant les actions transmissibles du solide j sur le solide i par la liaison de centre A, exprimé dans le repère $R_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$, s'écrit :

$$T\{j \rightarrow i\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{ji} \cdot \vec{x}_k + Y_{ji} \cdot \vec{y}_k + Z_{ji} \cdot \vec{z}_k \\ L_{ji} \cdot \vec{x}_k + M_{ji} \cdot \vec{y}_k + N_{ji} \cdot \vec{z}_k \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{ji} \\ Y_{ji} \\ Z_{ji} \end{array} \middle| \begin{array}{l} L_{ji} \\ M_{ji} \\ N_{ji} \end{array} \right\}_{A, R_k}$$

Q3. Dans le cas considéré (annexe 2), sur quel pied (droit ou gauche) le basculement est-il possible ?

Q4. Écrire les expressions de tous les torseurs modélisant les actions mécaniques extérieures appliquées au robot (E) isolé.

Q5. Justifier que le principe fondamental de la statique s'applique puis écrire le théorème de la résultante statique en projection selon \vec{z}_0 .

Q6. Proposer puis écrire une autre équation scalaire issue du principe fondamental de la statique permettant de déterminer l'expression de la composante du torseur de l'action mécanique du sol (0) sur le pied gauche en fonction de F, M, g, d et e. Justifier.

Q7. Dédurre des questions précédentes l'expression de la composante du torseur de l'action mécanique du sol (0) sur le pied gauche en fonction de F, M, g, d et e.

Pour vérifier le respect du critère de non-bascullement du robot, il faut que les contacts en O_G et O_D respectent toujours la contrainte d'unilatéralité : le sol ne peut exercer qu'un effort de réaction vertical ascendant sous chacun des pieds.

Q8. Écrire l'inégalité qui découle du respect de ce critère.

Q9. Quel est l'effort maximum qui peut être exercé sur le robot au point D , tout en assurant la condition de non-bascullement ? Conclure quant au respect du cahier des charges.

4. VALIDATION STATIQUE DU CRITERE DE MAINTIEN EN POSITION DE GENUFLEXION : exigence Ex1.2

L'articulation du genou est particulièrement sollicitée lorsque le robot a les genoux fléchis. La personne qui s'appuie sur l'épaule augmente le couple nécessaire au niveau des genoux pour maintenir une posture stable du robot. Il est nécessaire d'estimer ce couple dans la position la plus défavorable et de vérifier si le robot et ses moteurs pourront supporter une telle charge.

Pour établir une estimation de ce couple, on isole le sous-ensemble $E_{12} = \{1,2\}$ (voir **modèle plan proposé en annexe 3**).

On note G_{12} le centre de masse du sous-ensemble $E_{12} = \{1,2\}$ et M_{12} sa masse. $M_{12} = 32 \text{ kg}$.

Pour les applications numériques, on prendra g (accélération de la pesanteur) tel que $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On suppose que le robot est en position limite d'équilibre : seule la jambe gauche est sollicitée et le pied droit du robot est à la limite du décollement.

La force exercée par le patient sur le robot est modélisée par un glisseur de résultante $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$ appliqué au point D .

L'inclinaison du torse (vers l'avant) est de $\theta_{10} = 10^\circ$.

L'étude est menée pour la position de genuflexion maximale du scénario envisagé, soit pour une cote du point D de $Z_D = \overrightarrow{OD} \cdot \vec{z}_0 = 900 \text{ mm}$.

On note C_{32} le couple qu'exerce le tibia (3) sur la cuisse (2) permettant le maintien de la posture.

Les points D et G_{12} sont supposés, dans ce modèle plan, à l'aplomb des articulations de la cheville.

Dans cette partie, on suppose l'étude modélisable dans le plan de projection sagittal (\vec{x}_0, \vec{z}_0) : **ETUDE PLANE**.

Les données géométriques sont précisées sur le document annexe 3.

Q10. À l'aide d'une étude statique dans le plan sagittal, donner l'expression littérale du couple C_{32} nécessaire au niveau du genou pour maintenir cette posture sous charge en fonction de l_3 , θ_{43} , F et $M_{12} \cdot g$. On précisera et justifiera l'équation scalaire utilisée.

On adoptera pour la suite de l'étude la valeur suivante $C_{32} = 85 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Ce couple C_{32} est créé par le motoréducteur implanté dans l'articulation du genou. On donne :

- moteurs de référence **Maxon RE40 148877** (voir documentation technique en annexe 5) ;
- rapport de transmission du réducteur : $r_{32} = \left| \frac{\omega_m}{\omega_{32}} \right| = 95,91$;
- rendement du réducteur supposé unitaire : $\eta = 1 = \frac{\text{Puissance en sortie}}{\text{Puissance reçue}} = \frac{C_{32} \cdot \omega_{32}}{C_m \cdot \omega_m}$.

Q11. Calculer le couple délivré par le moteur et le comparer au couple de calage (stall torque en anglais) indiqué dans la documentation. Conclure quant à la capacité du robot à rester en position de genuflexion face au patient qui est en appui sur son épaule.

5. VALIDATION DYNAMIQUE DU CRITERE DE MAINTIEN EN POSITION DE GENUFLEXION : Exigence Ex 1.2

On veut à présent étudier la rigidité du robot face au couple résistant dû à l'appui du patient sur son épaule : lorsque le patient sollicite le robot pour se relever, le robot ne doit pas s'affaisser.

Dans le cahier des charges, cela se traduit par :

Maintien de la position sous charge (variation de hauteur du point d'appui)	$< 5 \text{ mm}$	Flexibilité : 2
Dépassement de position face à un échelon de sollicitation	$< 5\%$	Flexibilité : 2

On supposera que la variation de hauteur du point d'appui est sensiblement la variation de hauteur d'un point de la hanche (point C sur la figure annexe 3).

Description de la commande du moteur (voir figure 7 : Modèle de commande de mouvement du genou)

Pour que le robot puisse prendre une posture conforme à celle demandée par le cahier des charges, il faut un positionnement suffisamment précis des diverses articulations, et en particulier de celle du genou.

Cette position doit pouvoir être maintenue sous l'action de charges extérieures, comme l'appui du patient sur l'épaule de Roméo dans le cas du scénario proposé à l'étude.

Il faut donc que la commande du moteur du genou soit suffisamment précise et robuste, ce qui impose un asservissement de position angulaire.

Lors de la phase de relevée du patient, le mouvement ascensionnel découle des mouvements articulaires Hanche, Genou et Cheville. Les mouvements doivent donc être synchronisés en position mais aussi en vitesse pour limiter les erreurs de trainage, ce qui impose un asservissement en vitesse.

Enfin, l'équilibre dynamique demande à ce que les accélérations des diverses articulations, les efforts et les intensités électriques dans les moteurs soient bien maîtrisées ce qui impose un asservissement en intensité.

La figure 7 montre le schéma-bloc représentant un modèle simplifié de la commande de mouvement du genou.

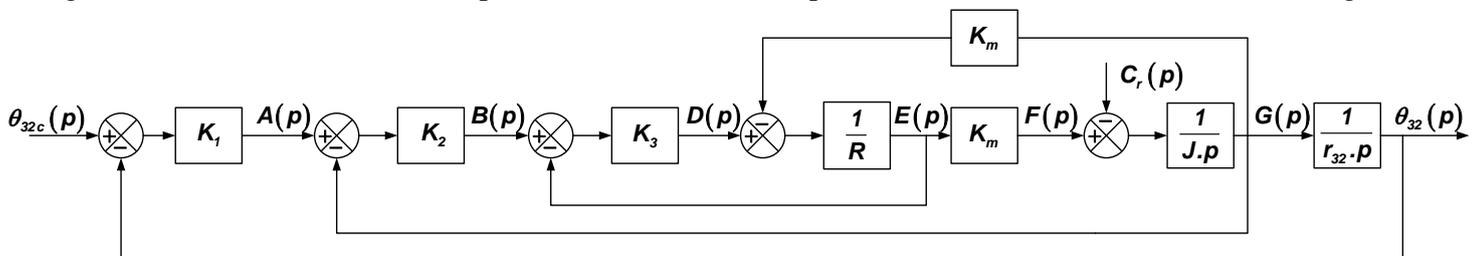


Figure 7 : Modèle de commande du genou

- Entrée : consigne de -variation de position angulaire du genou θ_{32c} (variation par rapport à une position de référence θ_{32-0})
- Sortie : variation de position angulaire du genou θ_{32} , relativement à θ_{32-0} .
- Perturbation : couple résistant C_r (dû aux actions de la pesanteur, aux actions du patient sur le robot...)
- Inertie équivalente, supposée constante, ramenée à l'arbre moteur : J
- Résistance de l'induit du moteur : R
- Constante de couple du moteur : K_m
- Rapport de réduction de la chaîne cinématique : $r_{32} = \frac{\omega_m}{\omega_{32}} = \frac{\dot{\theta}_m}{\dot{\theta}_{32}}$

Comme tous les axes commandés du robot, le moteur du genou est contrôlé en position, en vitesse et en intensité par trois capteurs (de position, vitesse et courant) associés à trois correcteurs proportionnels dont les gains sont notés respectivement K_1 , K_2 et K_3 .

Q12. Que représentent les variables $\mathbf{d}(t)$ ($\mathbf{D}(p)$ dans le domaine de Laplace), $\mathbf{e}(t)$ ($\mathbf{E}(p)$ dans le domaine de Laplace), $\mathbf{f}(t)$ ($\mathbf{F}(p)$ dans le domaine de Laplace), et $\mathbf{g}(t)$ ($\mathbf{G}(p)$ dans le domaine de Laplace) qui apparaissent dans le schéma-bloc de la figure 7 ? Quelles sont leurs unités (système international) ?

Q13. À partir du schéma-bloc, exprimer :

- $\theta_{32}(p)$, la variation angulaire de sortie, en fonction du couple résistant $\mathbf{C}_r(p)$ et de la variable intermédiaire $\mathbf{F}(p) \Rightarrow$ Équation notée (1)
- $\mathbf{F}(p)$ en fonction de $\mathbf{D}(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ Équation notée (2)
- $\mathbf{D}(p)$ en fonction de $\mathbf{B}(p)$ et de $\mathbf{F}(p) \Rightarrow$ Équation notée (3)

Q14. De même, exprimer :

- $\mathbf{B}(p)$ en fonction de $\mathbf{A}(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ Équation notée (4)
- $\mathbf{A}(p)$ en fonction de $\theta_{32c}(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ Équation notée (5)

On suppose que le Robot est en genuflexion, face au patient (position angulaire de référence du genou θ_{32-0}), prêt à recevoir l'action du patient.

Le couple résistant total sur l'arbre moteur est alors dû :

- à l'action du patient sur l'épaule du robot : $C_{rp}(p)$ et dans le domaine temporel $c_{rp}(t)$;
- au poids propre du robot : $C_{rg}(p)$ et dans le domaine temporel $c_{rg}(t)$.

Le couple résistant total est donc $c_r(t) = c_{rp}(t) + c_{rg}(t)$ et dans le domaine de Laplace :

$$C_r(p) = C_{rp}(p) + C_{rg}(p).$$

On modélise l'action du patient sur l'épaule du Robot par un échelon de couple $c_{rp}(t) = c_{rp} \cdot u(t)$ où la fonction $u(t)$ est la fonction de Heaviside.

Puisque l'on veut extraire de l'étude la seule influence de l'action du patient sur le robot, le théorème de superposition réduit l'étude au modèle suivant (figure 8).

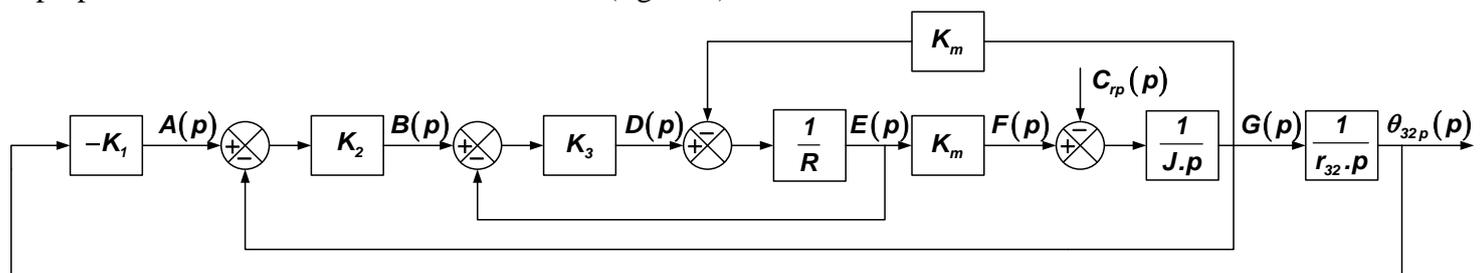


Figure 8 : Modèle de comportement du genou

Q15. Que représente précisément la grandeur $\theta_{32p}(t)$ ($\theta_{32p}(p)$ dans le domaine de Laplace)? Réécrire l'équation (5) dans le cas de l'étude proposée : seule l'influence de l'action du patient sur le robot est recherchée.

Q16. À partir des équations (4) et (5), déterminer l'expression de $\mathbf{B}(p)$ en fonction de $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ Équation notée (6).

Q17. À partir des équations (6) et (3), déterminer l'expression de $\mathbf{D}(p)$ en fonction de $\mathbf{F}(p)$ et de $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ Équation notée (7).

Q18. À partir des équations (7) et (2) déterminer l'expression de $\mathbf{F}(p)$ en fonction de $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ Équation notée (8).

Q19. Finalement, montrer que l'expression de $\theta_{32p}(p)$ en fonction de $C_{rp}(p)$ peut s'écrire sous la forme

$$\theta_{32p}(p) = \frac{\alpha}{1 + \beta \cdot p + \gamma \cdot p^2} C_{rp}(p)$$

Préciser les expressions de α , β et γ en fonction des diverses constantes.

On choisit les gains K_1 , K_2 et K_3 égaux à 100 (USI).

On pose l'inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur : $J = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Les valeurs numériques de la résistance aux bornes du moteur (*terminal resistance*, en anglais dans la documentation) et de la constante de couple (*torque constant*, en anglais dans la documentation) sont indiquées en annexe 4 dans la documentation moteur.

On rappelle que le rapport de réduction est : $r_{32} = 95,91$.

Q20. Calculer la valeur numérique du gain α de la fonction de transfert $\frac{\theta_{32p}(p)}{C_{rp}(p)}$ en précisant les unités.

Pour la suite de l'étude, on prendra (valeurs données en unité du système international) :

$$\theta_{32p}(p) = \frac{-1,7 \cdot 10^{-3}}{1 + 0,960 \cdot p + 2,25 \cdot 10^{-6} \cdot p^2} C_{rp}(p)$$

Q21. Calculer la valeur numérique du coefficient d'amortissement de cette fonction de transfert. Commenter ce résultat en s'appuyant sur les exigences du cahier des charges.

Pour la question suivante, on considère les deux items ci-après.

- La personne pose sa main et exerce un effort de 100 N ce qui induit un couple C_{rp} estimé à $C_{rp} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ (valeur surestimée, proche de celle déterminée lors de la vérification du couple de calage).
- Cette sollicitation induit alors une rotation de l'articulation du genou $\delta\theta_{32}$. C'est la variation angulaire de l'articulation du genou due seulement à l'appui du patient sur le robot.

Q22. Calculer la variation angulaire au niveau du genou $\delta\theta_{32}$ induite par cette perturbation. On donnera le résultat en degré.

On suppose que la position initiale avant appui du patient est proche de celle décrite par la figure de l'annexe 3 et par les données géométrique suivantes :

- $l_2 = 320 \text{ mm}$;
- $\theta_{21} = -63^\circ$ et $\theta_{10} = 0^\circ$, soit une inclinaison de la cuisse par rapport à la verticale de 63° .

Le cahier des charges précise que le maintien de la position sous charge (variation de hauteur du point d'appui qui est sensiblement la variation de hauteur de la hanche) doit être inférieur à 5 mm.

Q23. L'influence de cette perturbation est-elle compatible avec les exigences du cahier des charges ? Quel type de correction pourrait être envisagé pour annuler cette influence ?

6. VALIDATION DES CAPACITES DYNAMIQUES : Exigence technique ex1.3

L'objectif de cette partie est de vérifier les performances du robot pour assurer l'exigence technique ex1.3 "Monter l'épaule d'appui afin d'aider la personne à se lever".

Le moteur doit être capable de tourner suffisamment vite pour accompagner le patient dans son mouvement. Le couple de démarrage du moteur (valeur donnée par le constructeur) doit être suffisamment élevé pour assurer la mise en mouvement sous charge et donc les accélérations des solides constituants le robot.

Rappel de l'extrait du cahier des charges : temps de montée $10\text{s} < t_m < 15\text{s}$.

Le constructeur du robot donne les rapports de réduction de chacune des chaînes cinématiques des articulations de la jambe du robot. Elles sont actionnées par un moteur identique : **Maxon RE40 148877** (voir documentation technique en annexe 4).

Articulation		Cheville	Genou	Hanche
Nom de l'angle		θ_{43}	θ_{32}	θ_{21}
Ref. moteur		Maxon RE40 148877		
Rapport de réduction	$r = \frac{\omega_{\text{moteur}}}{\omega_{\text{articulation}}}$	$r_{43} = 117,07$	$r_{32} = 95,91$	$r_{21} = 117,07$

On suppose toujours le cas limite d'équilibre : seule la jambe gauche est sollicitée et le pied droit du robot est à la limite du décollement. On admet alors le modèle plan proposé, figure 10.

Le constructeur a adopté, pour le pilotage de tous les moteurs du robot, une loi d'évolution de vitesse parabolique (voir figure 9, pour une rotation positive).

On suppose, dans cette partie, que la commande des moteurs est suffisamment robuste pour que cette loi de commande soit effective : temps de réponse faible, erreur de traînage faible, pas de retard pur ...

L'équation de cette loi de vitesse est donc :

$$\dot{\theta}_m(t) = -\frac{4 \cdot \omega_0}{t_1^2} \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \omega_0$$

Avec :

$|\omega_0|$: la fréquence de rotation maximale commandée
 $(\omega_0 = cst, \text{ pour un déplacement donné})$

$\omega_0 > 0$ pour une rotation positive : $\dot{\theta}_m(t_1) > 0$

$\omega_0 < 0$ pour une rotation négative : $\dot{\theta}_m(t_1) < 0$

t_1 : la durée du mouvement commandé ($t_1 = cst, \text{ pour un déplacement donné}$)

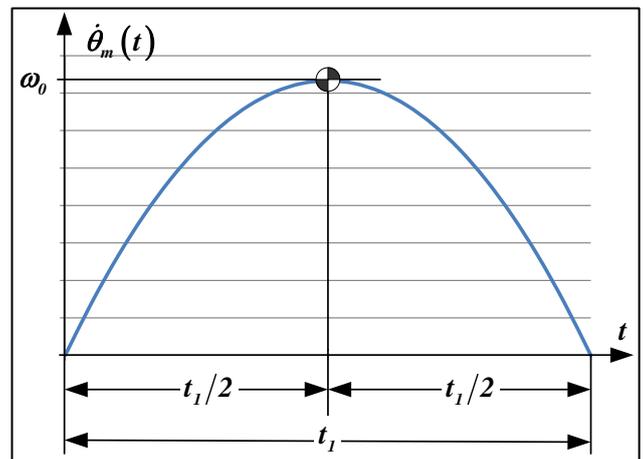


Figure 9 : Loi d'évolution de la vitesse de rotation du moteur en fonction du temps.

L'accélération angulaire maximale du moteur, pour cette loi de commande, est notée $\ddot{\theta}_{Max}$ telle que :

$$\ddot{\theta}_{Max} = \max(|\ddot{\theta}_m(t)|) \text{ pour } 0 \leq t \leq t_1$$

Q24. À partir de l'équation temporelle de la loi de commande, donner l'expression de l'accélération angulaire maximale $\ddot{\theta}_{Max}$ en fonction de $|\omega_0|$ et t_1 .

On pose : $\theta_m(t=0) = 0$.

Q25. Déterminer l'expression de $\theta_m(t)$, rotation du moteur au cours d'une phase de fonctionnement, en fonction du temps t et des paramètres ω_0 et t_1 . En déduire l'expression de $\Delta\theta_m = \theta_m(t_1) - \theta_m(t=0)$, la rotation du moteur pour une phase complète de fonctionnement.

Au cours de cette phase de fonctionnement, si la rotation du moteur est $\Delta\theta_m$, la rotation de l'articulation du genou correspondante est $\Delta\theta_{32}$.

Q26. En considérant le rapport de réduction r_{32} , donner l'expression de ω_0 en fonction de $\Delta\theta_{32}$, t_1 et r_{32} .

Avec cette loi parabolique, on veut que le robot se relève en 10 secondes.

On suppose que le débattement angulaire est $\Delta\theta_{32} = -40^\circ$.

Q27. Calculer la vitesse de rotation maximale $\Omega_0 = |\omega_0|$ à programmer pour réaliser ce relèvement en 10 secondes et pour une amplitude de mouvement du genou de -40° . Vérifier que la vitesse de rotation nominale (Nominal speed, en anglais dans la documentation) n'est pas dépassée.

Q28. Calculer l'accélération angulaire maximale $|\ddot{\theta}_{32Maxi}|$ de l'articulation du genou.

Cette accélération, induisant des effets d'inertie, conduit à la vérification du couple de démarrage du moteur (*Stall torque*, en anglais dans la documentation).

Cette vérification est menée grâce à une étude dynamique sur le sous-ensemble $E = \{1,2,3,4\}$ puis sur (1).

On propose le modèle simplifié, plan, présenté figure 10.

L'inclinaison du torse est $\theta_{10} = cst = 10^\circ$.

Le robot est constitué :

- du solide (1) : tronc du robot + tête + deux bras + jambe droite, de masse M_1 ;
- du solide (2) : cuisse gauche. La masse de (2) et les inerties sont négligées ;
- du solide (3) : tibia gauche. La masse de (3) et les inerties sont négligées ;
- du solide (4) : pied gauche. La masse de (4) et les inerties sont négligées.

Rappel : On suppose toujours le cas limite d'équilibre : Seule la jambe gauche est sollicitée et le pied droit du robot est à la limite du décollement. La jambe droite, pilotée par ces propres moteurs, n'influence pas la dynamique du cas étudié.

On note $\dot{Z}_D(t)$, la vitesse ascensionnelle du tronc du robot : $\dot{Z}_D(t) = \frac{d}{dt} Z_D(t)$.

Efforts jouant un rôle significatif dans l'étude dynamique :

➤ Les motoréducteurs induisent des efforts dans les articulations en A, B et C.

- En C, entre les solides (1) et (2) : motoréducteur de hanche qui induit un effort modélisé par le torseur :

$$\circ T\{1 \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{12} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_C \text{ (effort intérieur à } E = \{1,2,3,4\})$$

- En B, entre les solides (2) et (3) : motoréducteur de genou qui induit un effort modélisé par le torseur :

$$\circ T\{2 \rightarrow 3\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{23} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_{32} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B \text{ (effort intérieur à } E = \{1,2,3,4\})$$

- En A, entre les solides (3) et (4) : motoréducteurs de cheville qui induit un effort modélisé par le torseur :

$$\circ T\{3 \rightarrow 4\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{34} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_A \text{ (effort intérieur à } E = \{1,2,3,4\})$$

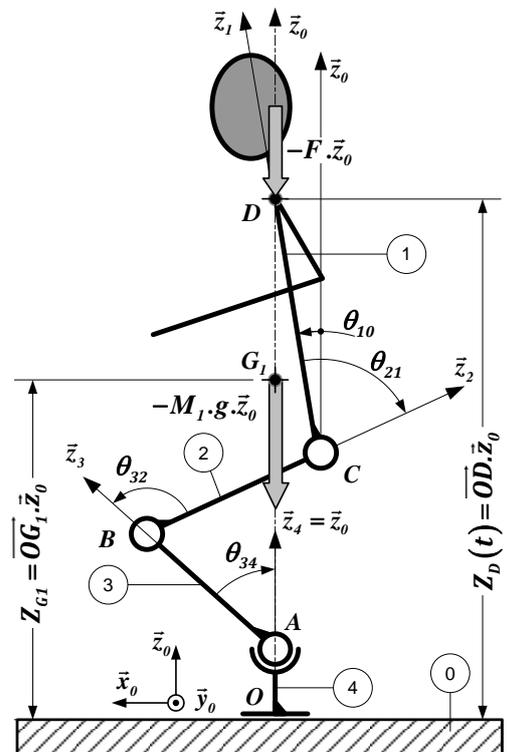


Figure 10 : Modèle cinématique plan, en projection dans le plan sagittal (\vec{x}_0, \vec{z}_0) - Robot en genuflexion

➤ Effort du patient sur le robot :

On suppose que le patient qui demande assistance, exerce une force verticale descendante de module F , au point D . Malgré la dissymétrie induite par cette force, on conserve un modèle plan. Lors du mouvement étudié, le point D reste sur la verticale (A, \vec{z}_0) .

$$T\{\text{patient} \rightarrow 1\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$$

➤ Effort de pesanteur :

Pour simplifier l'étude, on suppose que le centre de masse G_1 du solide (1), est toujours sur la verticale (A, \vec{z}_0) . On a alors $\vec{V}(G_1, 1/0) = \vec{V}(D, 1/0) = \dot{Z}_D(t) \cdot \vec{z}_0$, ce qui conduit à dire que le mouvement du solide (1) est une translation rectiligne, de direction \vec{z}_0 .

Les poids des autres solides sont négligés.

$$T\{\text{poids} \rightarrow 1\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1}$$

➤ Effort du sol sur le robot :

Le pied est en appui plan sur le sol. L'effort transmissible par cette liaison est modélisable par le torseur suivant :

$$T\{0 \rightarrow 4\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_{04} \cdot \vec{z}_0 \\ M_{04} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_O$$

➤ On suppose toutes les liaisons parfaites.

L'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E (programme 2^{ième} année) donne l'équation différentielle suivante :

$$M_1 \cdot \dot{Z}_D \cdot \ddot{Z}_D = -F \cdot \dot{Z}_D - M_1 g \cdot \dot{Z}_D + C_{12} \cdot \dot{\theta}_{21} - C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32} + C_{34} \cdot \dot{\theta}_{43} \quad (i)$$

Q29. Quel (ensemble de) solide(s) faut-il isoler pour déterminer le couple C_{12} ? Préciser le théorème, l'éventuel point d'application et la direction de projection permettant d'écrire l'équation scalaire utile.

On obtient l'équation suivante :

$$-M_1 \cdot l_1 \cdot \ddot{Z}_D \cdot \sin \theta_{10} = (F + M_1 \cdot g) \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} + C_{21} \quad (ii)$$

Une étude dynamique sur le pied (4) montre que :

$$|C_{43} \cdot \dot{\theta}_{43}| \ll |C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32}|$$

Q30. En utilisant les équations (i) et (ii), retrouver l'équation différentielle suivante :

$$M_1 \cdot \dot{Z}_D(t) \cdot \ddot{Z}_D(t) = -(M_1 \cdot g + F) \cdot \dot{Z}_D(t) + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot (M_1 \cdot (g + \ddot{Z}_D(t)) + F) \cdot \dot{\theta}_{21} - C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32} \quad (*)$$

La première figure de l'annexe 4 fait apparaître que les lois d'évolution des angles θ_{21} , θ_{32} et θ_{43} sont quasiment proportionnelles à la vitesse d'élévation du tronc (linéarisation des lois d'évolution).

On peut donc écrire (vitesse angulaire en $rad \cdot s^{-1}$ et vitesse en $m \cdot s^{-1}$) :

$$\dot{\theta}_{32} = -5 \cdot \dot{Z}_D \quad \dot{\theta}_{21} = +2,5 \dot{Z}_D = -0,5 \cdot \dot{\theta}_{32} \quad \dot{\theta}_{43} = +2,5 \dot{Z}_D = -0,5 \cdot \dot{\theta}_{32}$$

Q31. En utilisant les lois linéarisées des lois de vitesse et leur dérivée par rapport au temps, en utilisant l'expression (*) donnée, déduire l'expression du couple C_{32} en fonction de M_1 , F , l_1 , θ_{10} et $\ddot{\theta}_{32}$. On mettra cette relation sous la forme $C_{32} = A \cdot \ddot{\theta}_{32} + B$ et on identifiera A et B

Une application numérique avec $M_1 = 25 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $F = 100 \text{ N}$, $\theta_{10} = 10^\circ$ et $l_1 = 480 \text{ mm}$ conduit à l'évaluation des grandeurs A et B .

Pour la suite de l'étude, on prendra donc : $A = -0,8 \text{ kg.m}^2$ et $B = 55 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$.

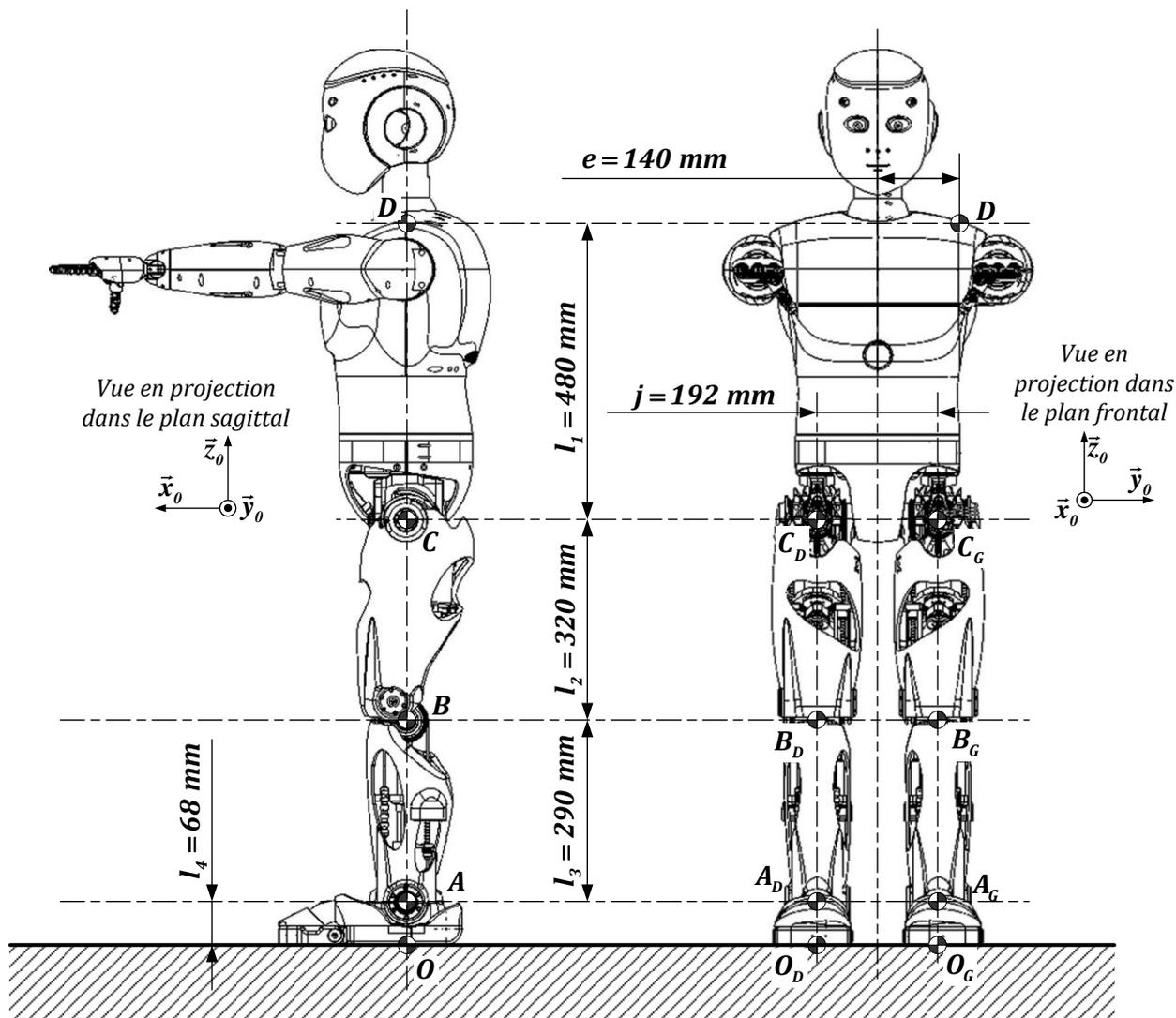
Le document constructeur relatif au moteur utilisé dans la chaîne d'énergie de cette articulation donne le couple de démarrage du moteur (*Stall torque*, en anglais dans la documentation).

On rappelle que le rapport de réduction du motoréducteur du genou est $r_{32} = 95,91$ et que son rendement est unitaire.

Pour réaliser l'application numérique on prendra $|\ddot{\theta}_{32\text{Maxi}}| = 0,04 \text{ rad.s}^{-2}$, valeur maximale de l'accélération angulaire.

Q32. Vérifier que le moteur est correctement dimensionné du point de vue du couple de démarrage.

ANNEXE 1 : Définition dimensionnelle partielle du robot

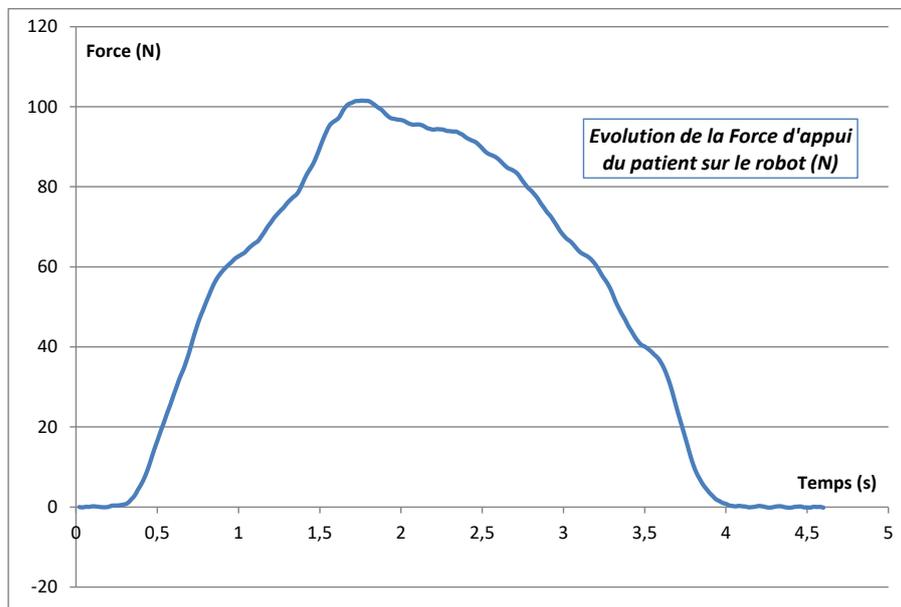


Document extrait du document constructeur : définition dimensionnelle partielle du robot.

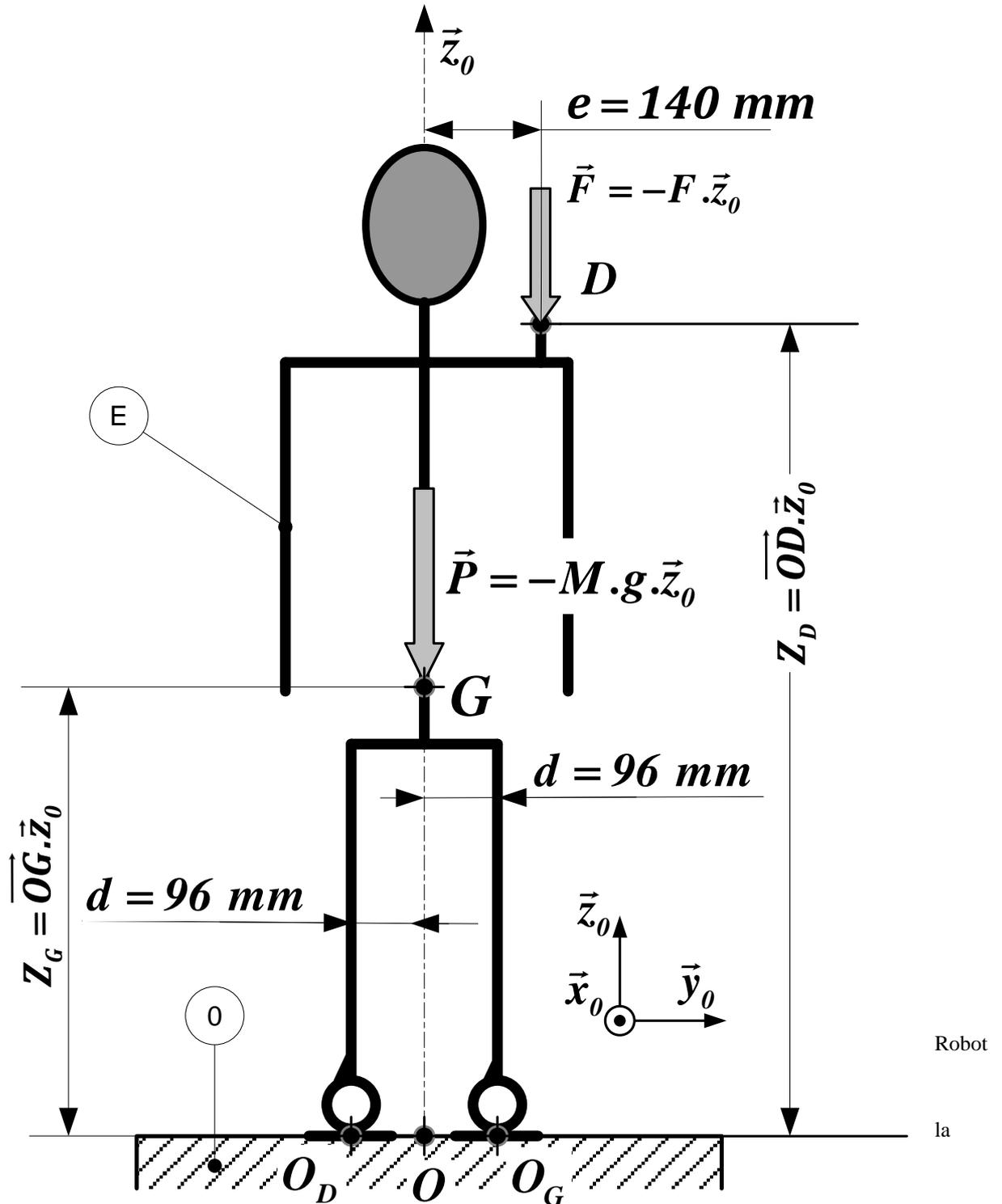
Mesure de la force verticale qu'exerce une personne sur un support fixe pour se relever

Enregistrement réalisé à partir d'une expérience de simulation de relèvement d'une personne, de la position assise à la position debout, avec un appui avec la main sur un support fixe.

Force verticale qu'exerce une personne sur un support fixe, pour se relever.



ANNEXE 2 : Robot en g enuflexion. Modèle plan (projection dans le plan frontal)



Données

Masse du

Roméo :

$M = 40,5 \text{ kg}$.

Accélération de

pesanteur :

$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Longueurs : $d = 96 \text{ mm}$; $e = 140 \text{ mm}$

ANNEXE 3 : Robot en g nuflexion. Modèle cinématique plan, en projection dans le plan sagittal (\vec{x}_0, \vec{z}_0)

Données géométriques :

- $\vec{OA} = l_4 \cdot \vec{z}_0$; $\vec{AB} = l_3 \cdot \vec{z}_3$; $\vec{BC} = l_2 \cdot \vec{z}_2$;
 $\vec{CD} = l_1 \cdot \vec{z}_1$;
- $l_1 = 485 \text{ mm}$; $l_2 = 320 \text{ mm}$; $l_3 = 290 \text{ mm}$;
 $l_4 = 67 \text{ mm}$
- $\theta_{21} = -73^\circ$; $\theta_{32} = +106^\circ$;
- $\theta_{43} = -44^\circ$; $\theta_{10} = 10^\circ$

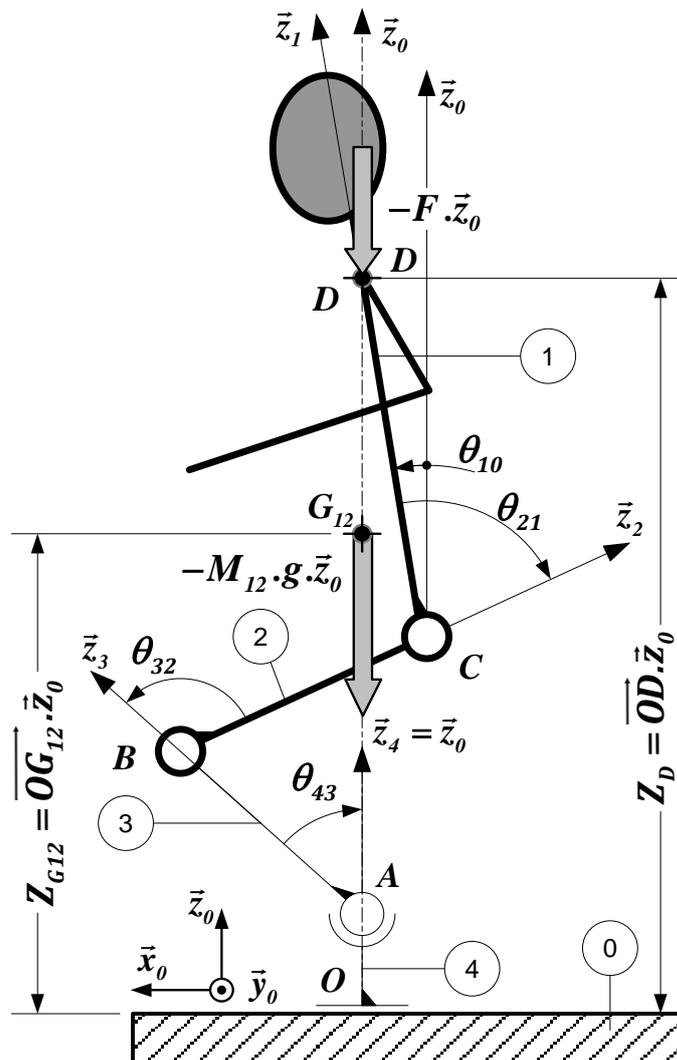
Ces valeurs induisent alors les positions des points D et G_{12} , avec :

- $\vec{OD} = Z_D \cdot \vec{z}_0$ avec $Z_D = 900 \text{ mm}$
- $\vec{OG}_{12} = Z_{G_{12}} \cdot \vec{z}_0$ avec $Z_{G_{12}} \approx 550 \text{ mm}$

Paramétrage :

- **Solide (1)** : Tronc + Bras + Tête
- **Solide (2)** : Cuisses
- **Solide (3)** : Tibias
- **Solide (4)** : Pieds

Robot en g nuflexion : solides (1) et (2) isolés ; les autres solides voisins en traits fins. Les efforts de (3) sur (2) ne sont pas représentés.



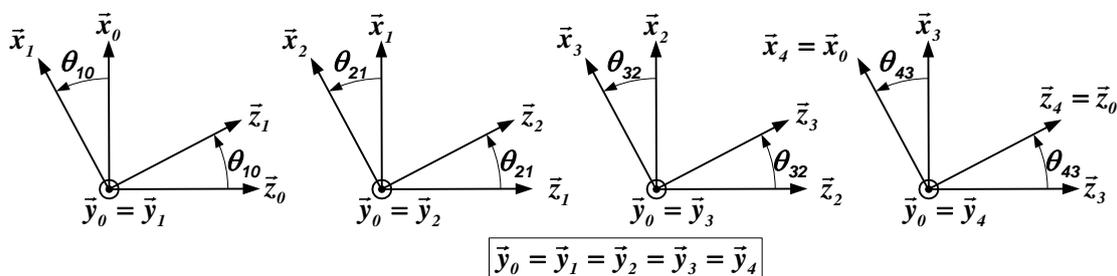
$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: Repère fixe lié au sol (0)

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: Repère lié au solide (1) : $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$

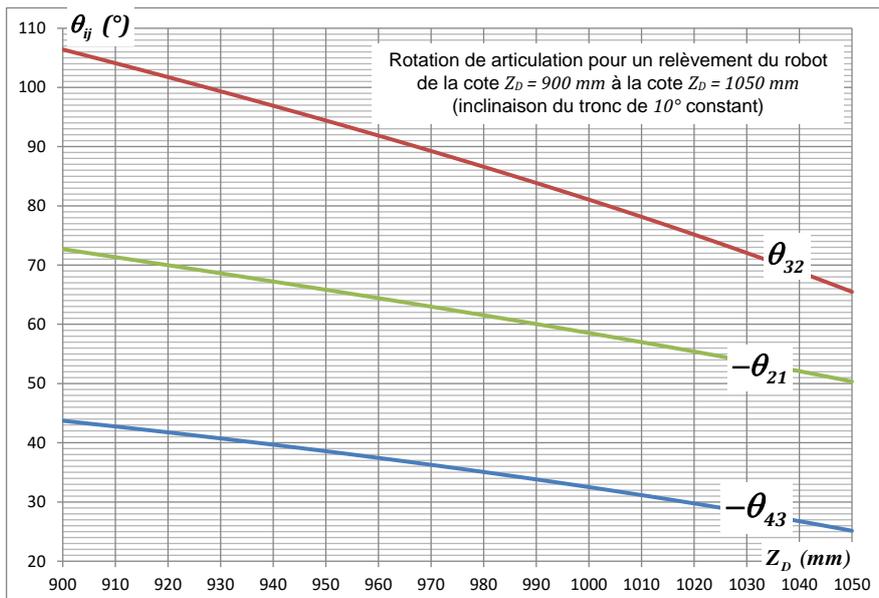
$R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: Repère lié au solide (2) : $\theta_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$

$R_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: Repère lié au solide (3) : $\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$

$R_4 = R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: Repère lié au solide (4) : $\theta_{43} = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4) = (\vec{x}_3, \vec{x}_0) = (\vec{z}_3, \vec{z}_0)$

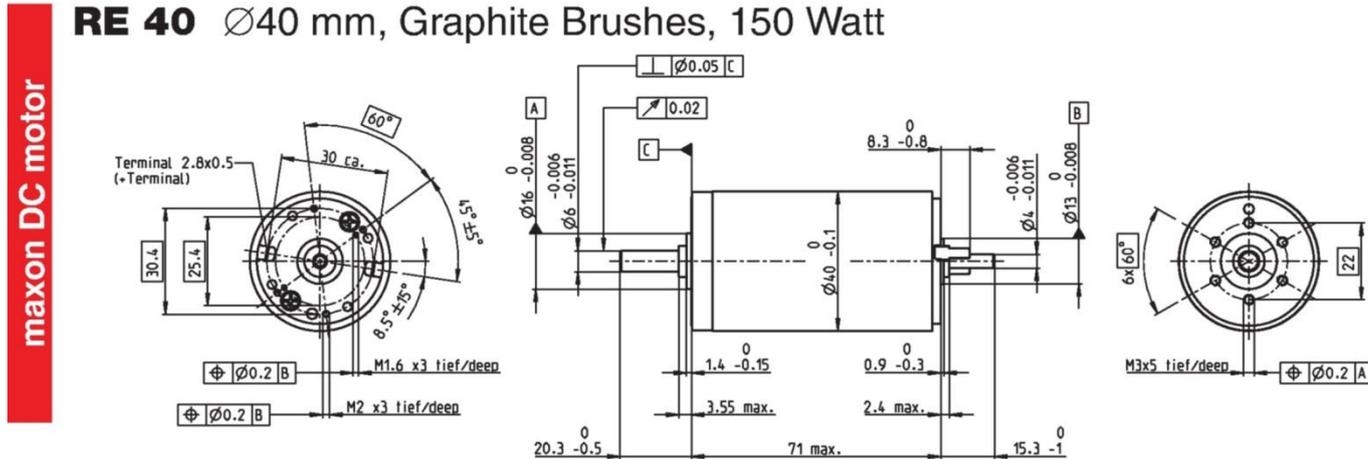


ANNEXE 4 :



Simulation numérique : rotation des articulations pour un relèvement du robot de la cote $Z_D = 900 \text{ mm}$ à la cote $Z_D = 1050 \text{ mm}$ (inclinaison du tronc de 10° constant)

RE 40 $\varnothing 40 \text{ mm}$, Graphite Brushes, 150 Watt



M 1:2

- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Order Number Moteur pour l'articulation du genou

148866	148867	148877	218008	218009	218010	218011	218012	218013	218014
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Motor Data		148866	148867	148877	218008	218009	218010	218011	218012	218013	218014
Values at nominal voltage											
1	Nominal voltage	V	12.0	24.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0
2	No load speed	rpm	6920	7580	7580	6420	5560	3330	2690	2130	1710
3	No load current	mA	241	137	68.6	53.7	43.7	21.9	16.7	12.5	9.67
4	Nominal speed	rpm	6370	6930	7000	5810	4920	2700	2050	1500	1080
5	Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	94.9	170	184	183	177	187	187	189	189
6	Nominal current (max. continuous current)	A	6.00	5.77	3.12	2.62	2.20	1.38	1.12	0.898	0.721
7	Stall torque	mNm	1680	2280	2500	1990	1580	995	796	641	512
8	Starting current	A	102	75.7	41.4	28.0	19.2	7.26	4.68	3.00	1.92
9	Max. efficiency	%	88	91	92	91	91	89	88	87	86
Characteristics											
10	Terminal resistance	Ω	0.117	0.317	1.16	1.72	2.50	6.61	10.2	16.0	24.9
11	Terminal inductance	mH	0.0245	0.0823	0.329	0.460	0.612	1.70	2.62	4.14	6.40
12	Torque constant	mNm / A	16.4	30.2	60.3	71.3	82.2	137	170	214	266
13	Speed constant	rpm / V	581	317	158	134	116	69.7	56.2	44.7	35.9
14	Speed / torque gradient	rpm / mNm	4.15	3.33	3.04	3.23	3.53	3.36	3.39	3.35	3.37
15	Mechanical time constant	ms	6.03	4.81	4.39	4.36	4.35	4.31	4.31	4.31	4.32
16	Rotor inertia	gcm ²	139	138	138	129	118	123	121	123	120

Documentation constructeur : caractéristiques techniques du moteur utilisé dans l'articulation du genou

Remarque : les caractéristiques du moteur utilisé, MAXON RE40 148877, sont à extraire de l'encadré du document technique