

DS N°5

Aucun document autorisé

Calculatrices autorisées

Le devoir comporte un problème extrait d'un sujet de concours et un exercice

Durée 2h

Exercice : Tracés de Bode

Un système répond à la fonction de transfert Laplacienne suivante :

$$H(p) = \frac{6}{5 \cdot 10^{-5} \cdot p^3 + 3,1 \cdot 10^{-3} \cdot p^2 + 0,506 \cdot p + 1} = \frac{6}{(1 + 0,5 \cdot p) \cdot \left(1 + 0,006 \cdot p + \frac{1}{100^2} \cdot p^2\right)}$$

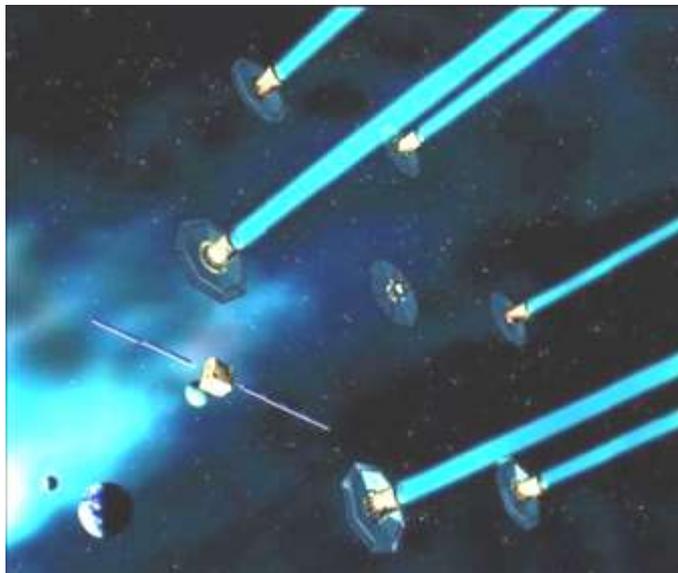
Question et travail demandé :

- Tracer, sur le document réponse, en superposition des tracés réels donnés, les diagrammes asymptotiques de Bode (en gain et en phase) de cette fonction de transfert. Vous justifierez les tracés effectués.
- Les tracés donnés font-ils apparaître un phénomène de résonance ? Si, oui, pour quelle fonction de transfert rentrant dans l'écriture de $H(p)$? sans avoir les tracés réels de $H(p)$, pouvait-on prévoir ce phénomène ? justifier.

Problème : Observation par interférométrie (extrait X-ENS PSI 09)

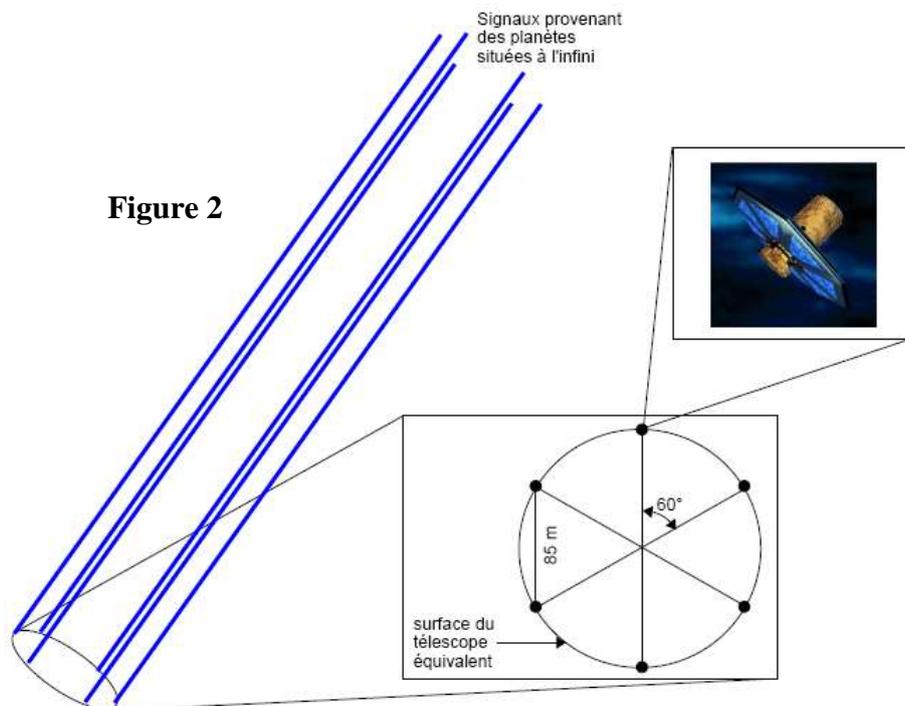
En astronomie, de nos jours, de nombreuses missions sont en cours pour découvrir l'existence de planètes dans les systèmes extrasolaires. Actuellement, les scientifiques en ont déjà découvert plus de 200 dont la masse est à peu près 5 fois supérieure à celle de la Terre, mais ils estiment que des planètes de caractéristiques identiques à celles de la Terre existent. L'Agence Spatiale Européenne (ESA) a donc lancé un projet de recherche, baptisé « Darwin », dont l'objectif est de rechercher les planètes identiques à la Terre, et d'en étudier la composition. Pour atteindre cet objectif, l'ESA doit disposer d'un système lui permettant d'exploiter les informations contenues dans les signaux lumineux qu'émettent les étoiles, de manière plus approfondie que ne le peuvent les télescopes actuels.

Figure 1

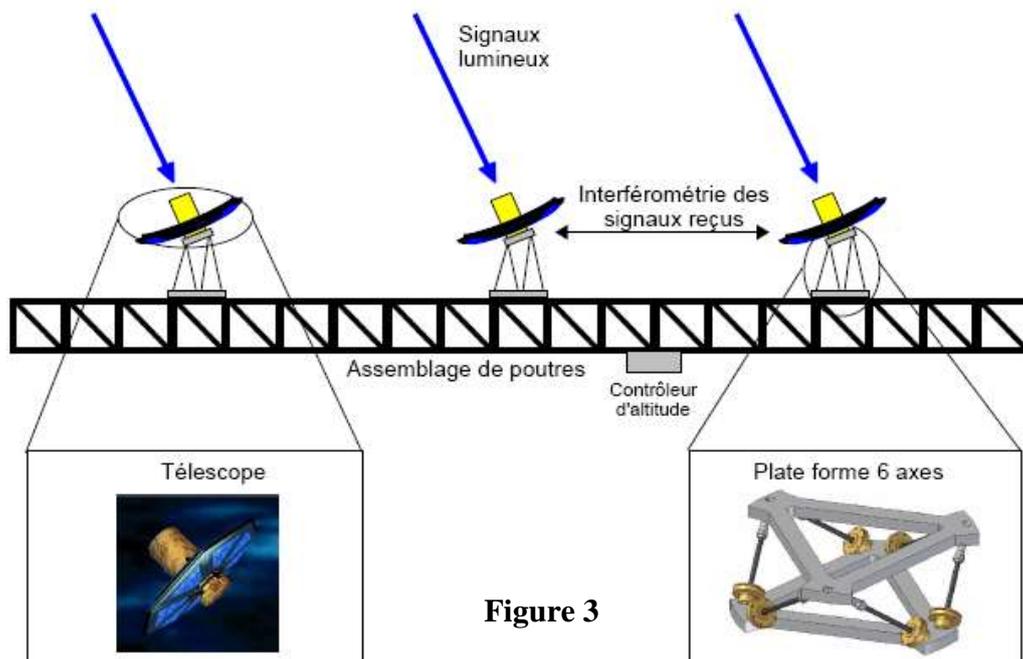


Pour satisfaire ce besoin, la solution technique retenue par l'ESA est un télescope « géant », de 500 m de périmètre (figure 1). Or, actuellement, la fabrication d'un télescope de cette taille est irréalisable (le télescope Hubble qui déchiffre les images de l'univers a un périmètre de 13 m). L'ESA mise donc sur une nouvelle technologie de station spatiale d'observation, basée sur l'interférométrie. Ce nouveau type de station spatiale d'observation possède 6 télescopes qui captent les ondes lumineuses venues de l'espace et les font interférer afin d'en exploiter les informations. L'interférométrie permet d'éliminer les signaux parasites et donc d'obtenir des informations de plus grandes précisions.

La figure 2 précise la position relative des télescopes entre eux, retenue par l'ESA, pour fabriquer le télescope « géant ». La surface du télescope équivalent à la station spatiale est un cercle s'appuyant sur la position des 6 télescopes.



Pour sélectionner les signaux lumineux, et faire en sorte que leur interférométrie puisse se réaliser correctement, il est indispensable que les 6 télescopes puissent être orientés, et ne bougent pas les uns par rapport aux autres. Une des solutions retenues par l'ESA est de les relier par un assemblage de poutres, et de les positionner sur des plateformes 6 axes de type Stewart.



Le cahier des charges partiel d'une plateforme 6 axes est représenté sur la figure 4.

Exigence	Critères	Niveaux
Ex1 : permettre à l'assemblage de poutres de positionner le télescope	Précision de l'angle d'orientation	Parfaite aux basses fréquences
	Résonance	Pas de résonance
		Pulsation de cassure $\omega_c = 2\pi \times 5 \text{ Hz}$
Filtrage des vibrations hautes fréquences	Décroissance de 40 dB/décade	

Figure 4

La structure de la plateforme 6 axes est illustrée sur la figure 5. Elle est constituée d'une embase supérieure (supportant le satellite), d'une embase inférieure (encastrée sur l'assemblage de poutres) et de 6 bras. Le contact de chaque bras avec l'embase supérieure et l'embase inférieure est modélisé par une liaison rotule. Les longueurs des 6 bras sont variables (réglée chacune par un actionneur linéaire), indépendamment les unes des autres, ce qui permet de positionner l'embase supérieure (et donc le télescope) par rapport à l'embase inférieure (et donc l'assemblage de poutres) selon les 6 degrés de liberté de l'espace.

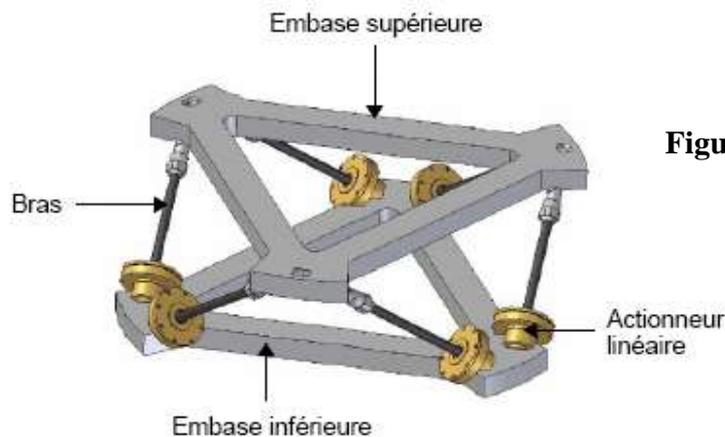


Figure 5

Les 6 bras sont pilotés par une même partie commande. Pour allonger ou raccourcir la longueur des bras, la partie commande compare la longueur q_i du bras n^o à la longueur q_{ic} souhaitée.

La caractérisation des niveaux des critères de l'exigence Ex1 du diagramme des interacteurs est représentée, sous forme de graphique, sur la figure 6.

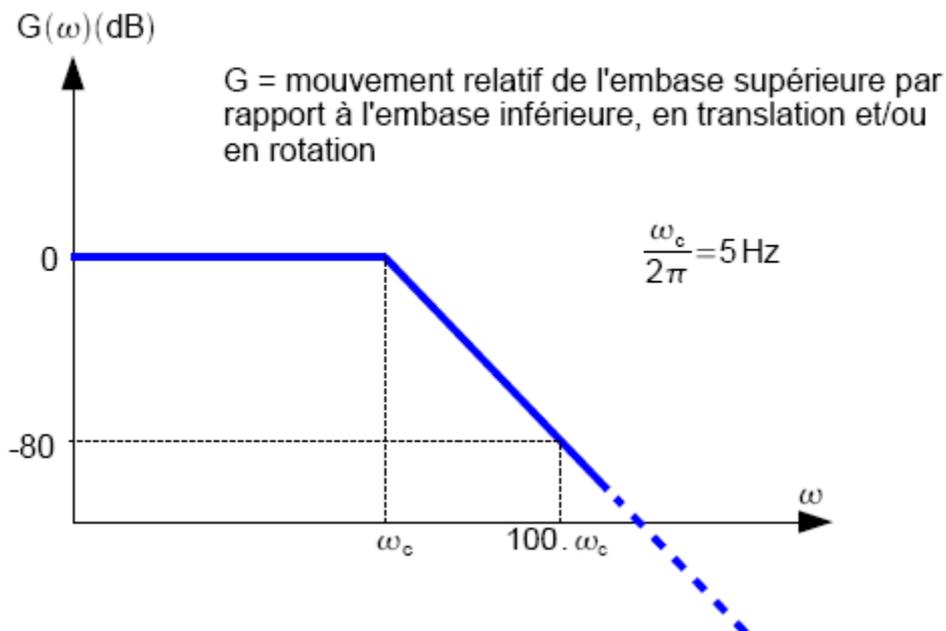


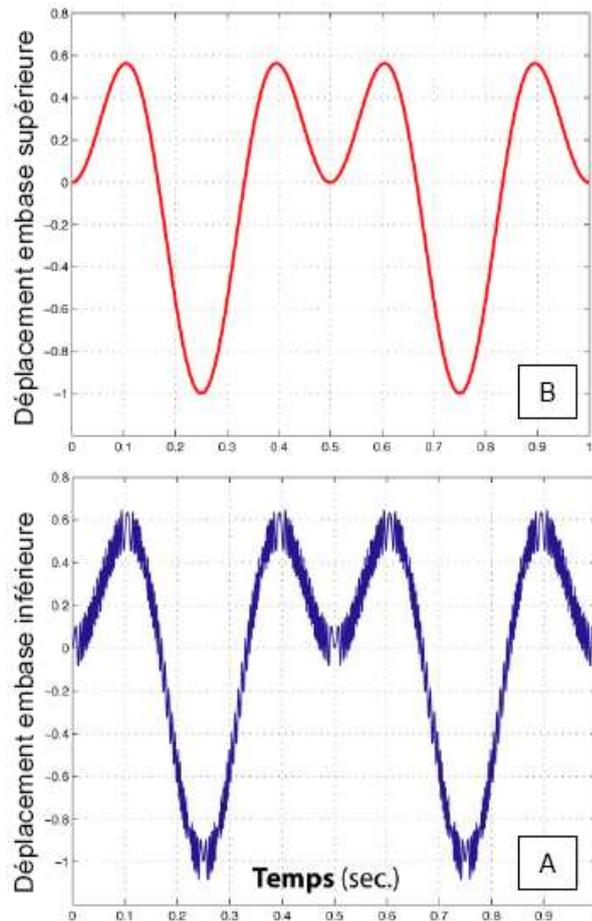
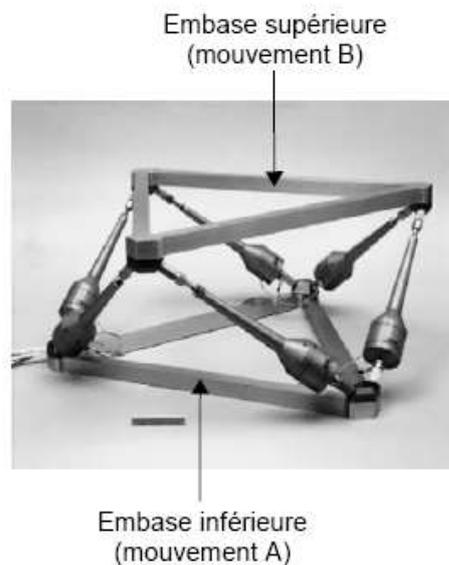
Figure 6

Question 1 : Expliquer en quoi le diagramme de Bode de la figure 6 est cohérent avec les critères et leurs niveaux souhaités de l'exigence du cahier des charges.

L'objectif de cette étude est la validation de la capacité de la plateforme 6 axes à satisfaire les niveaux des critères de l'exigence du cahier des charges, représenté sur la figure 6.

Le mouvement de l'embase inférieure de la plateforme est constitué d'un signal basse fréquence (correspondant au réglage de l'orientation souhaitée du télescope) et d'un signal haute fréquence (correspondant aux bruits parasites). Comme expliqué sur la figure 6, afin de satisfaire le besoin, il faut filtrer le signal haute fréquence, qui perturbe l'interférométrie entre les télescopes (voir figure 7).

Figure 7 : exemple de filtrage haute fréquence entre le mouvement de l'embase inférieure [A] et le mouvement de l'embase supérieure [B], qui annule les bruits parasites.

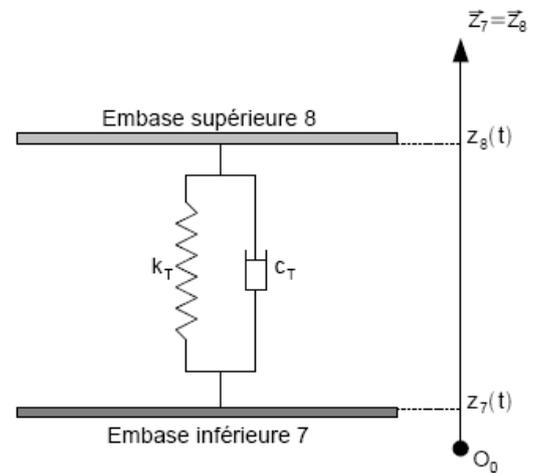


Deux solutions de filtrages sont imaginables : le filtrage passif (obtenu sans apport d'énergie extérieure, simplement en utilisant le caractère dissipatif de certains composants, comme par exemple un amortisseur par frottement visqueux en mécanique) ou le filtrage actif (obtenu avec apport d'énergie extérieure et utilisation d'un composant pilotable, comme par exemple un vérin piloté en mécanique).

L'objectif de cette partie est de justifier le choix de l'amortissement actif plutôt que l'amortissement passif pour valider les niveaux des critères de la fonction Ex1, représentés sur la figure 6.

Le modèle d'étude retenu est le suivant (voir figure 8) : on ne considère que le cas simplifié des mouvements de translation (perpendiculaire aux embases) suivant l'axe $\vec{z}_7 = \vec{z}_8$ de l'embase inférieure 7 et de l'embase supérieure 8 surmontée d'un télescope (l'ensemble embase supérieure et télescope a une masse $M = 1000$ kg). Le lien entre les embases est modélisé par un ressort de raideur $k_T = 10^6$ N/m (représentant l'élasticité équivalente des bras, en projection sur $\vec{z}_7 = \vec{z}_8$) et un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement c_T (représentant la dissipation interne par frottement dans les bras et les liaisons entre les bras). On rappelle que, dans l'amortisseur visqueux, l'effort développé suite à un allongement $z(t)$ est $-c_T \frac{dz(t)}{dt}$.

Figure 8 : Modèle d'étude retenu pour l'étude de l'amortissement des vibrations hautes fréquences entre l'embase inférieure et l'embase supérieure. Les coordonnées $z_7(t)$ et $z_8(t)$ sont définies



Le **Principe Fondamental** de la **Dynamique** appliqué à l'ensemble embase supérieure 8 + télescope donne l'équation suivante :

$$-k_T(z_8(t) - z_7(t)) - c_T \left(\frac{dz_8(t)}{dt} - \frac{dz_7(t)}{dt} \right) = M \frac{d^2(z_8(t))}{dt^2}$$

Question 2 : Déterminer l'expression analytique, dans le domaine de Laplace, de la fonction de transfert $H(p) = \frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ du filtre réalisé. « p » est la variable de Laplace.

Question 3 : Montrer que $H(p) = \frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ peut se mettre sous la forme suivante : $H(p) = \frac{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

Déterminer les expressions analytiques des constantes ξ et ω_0 .

Question 4 : Montrer la pertinence du choix des bras en comparant la valeur numérique de ω_0 à la pulsation de cassure ω_c souhaitée (voir figure 6).

Question 5 : Représenter, sur le document réponse, les diagrammes asymptotiques et réels de Bode de $H(p)$ pour $\xi = 1$. Vous justifierez les tracés réalisés.

Les diagrammes de Bode en gain, pour les valeurs $\xi = 0,01$, $\xi = 0,3$ et $\xi = 2$ sont représentés sur la figure 9.

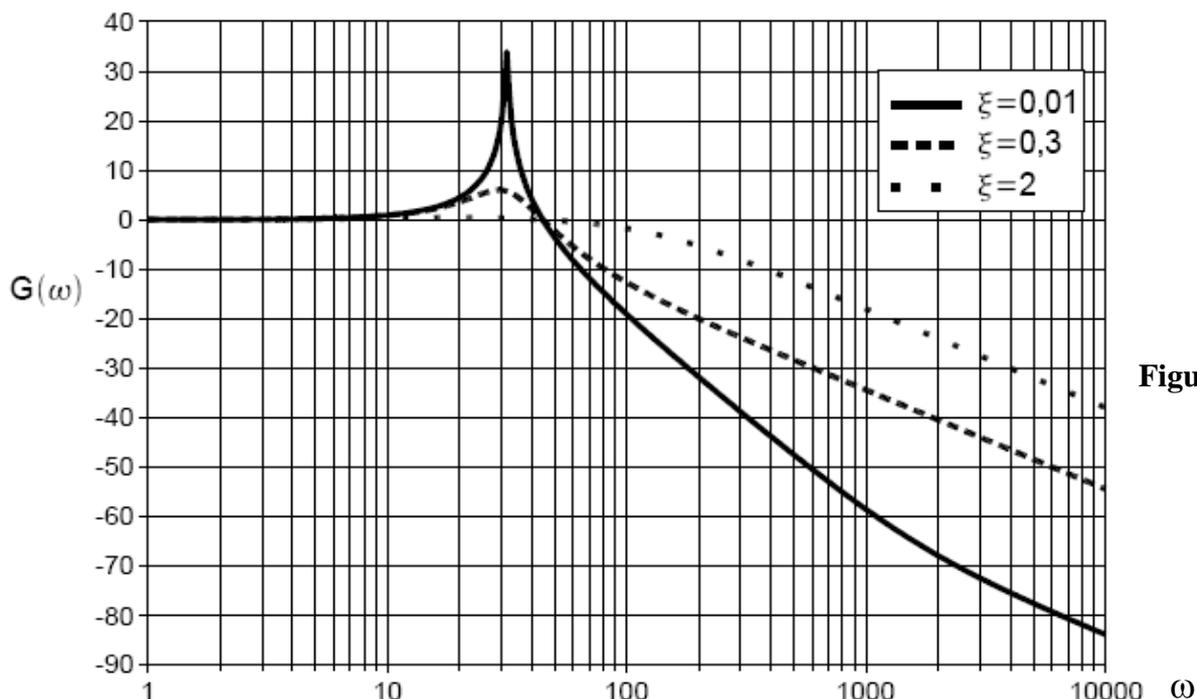


Figure 9

Question 6 : Commenter le choix de ξ à prendre. Discuter en particulier de son influence sur la résonance et le filtrage hautes fréquences.

Question 7 : Conclure quant à la pertinence du choix d'un amortissement actif pour satisfaire les niveaux des critères de l'exigence du cahier des charges (voir figure 6) ?

L'amortissement passif ne permet pas le respect des critères spécifiés figure 6. Une solution par amortissement actif a été envisagée.

L'amortissement actif est basé sur une rétroaction en force (voir figure 10) : dans chaque bras (dont l'élasticité est modélisée par un ressort de raideur k), un capteur mesure l'effort $f_i(t)$ qu'exerce le bras i sur l'embase supérieure, et une force supplémentaire, proportionnelle à l'intégrale de $f_i(t)$ est exercée (coefficient de proportionnalité g). La force $f_i(t)$ qu'exerce chaque bras sur l'embase supérieure vérifie donc $f_i(t) = -k q_i(t) - g \int f_i(t)$.

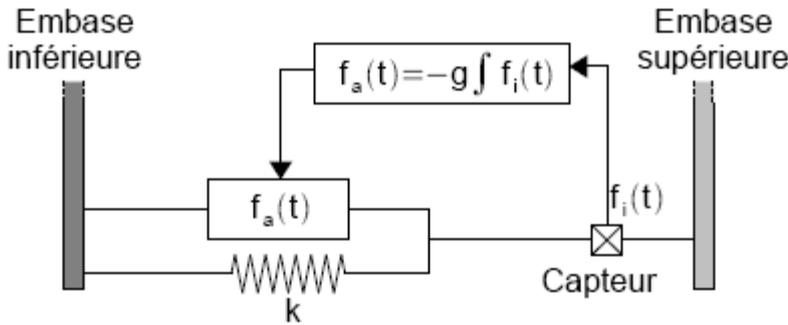


Figure 10

Sous certaines hypothèses et en ne considérant que des « petits mouvements » de translation (paramètres $Z_i(t)$) et de rotation (paramètres $\theta_i(t)$), la mise en équation donne :

$$\left(Mp^2 + \frac{p}{p+g} 2k \right) Z_8(p) = \frac{p}{p+g} 2k Z_7(p)$$

$$\left((B_8 + M h^2) p^2 + \frac{p}{p+g} \frac{2}{3} k L^2 \right) \theta_8(p) = \frac{p}{p+g} \frac{2}{3} k L^2 \theta_7(p)$$

où $M = 1000 \text{ kg}$ est la masse de l'embase supérieure, surmontée du télescope, $g = 50 \text{ s}^{-1}$ est la constante de proportionnalité dans la rétroaction en force de l'amortissement actif, $k = 500\,000 \text{ N.m}^{-1}$ la raideur d'élasticité des bras de la plateforme, $B_8 = 83 \text{ kg.m}^2$ l'inertie de l'embase supérieure surmontée du télescope selon l'axe de direction \vec{y}_8 passant par son centre de gravité G_8 , h la distance entre O_8 et G_8 et $L = 30 \text{ cm}$ la longueur au repos de chaque bras.

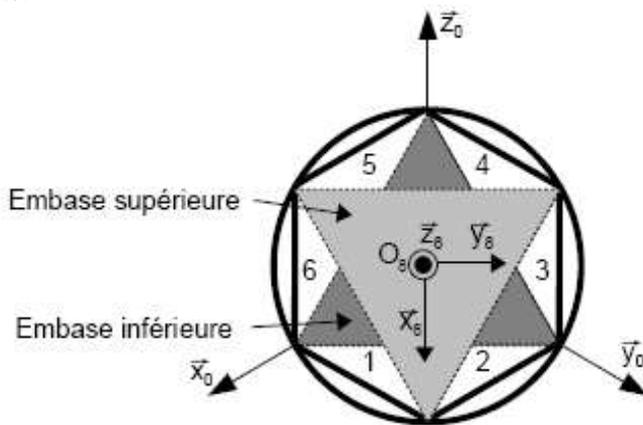


Figure 11 : Plateforme vue de « dessus »

Chaque mouvement peut donc être modélisé par une fonction de transfert du type :

$$\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)} = \frac{\mu_1}{p^2 + gp + \mu_1} \quad \text{et} \quad \frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)} = \frac{\mu_2}{p^2 + gp + \mu_2}$$

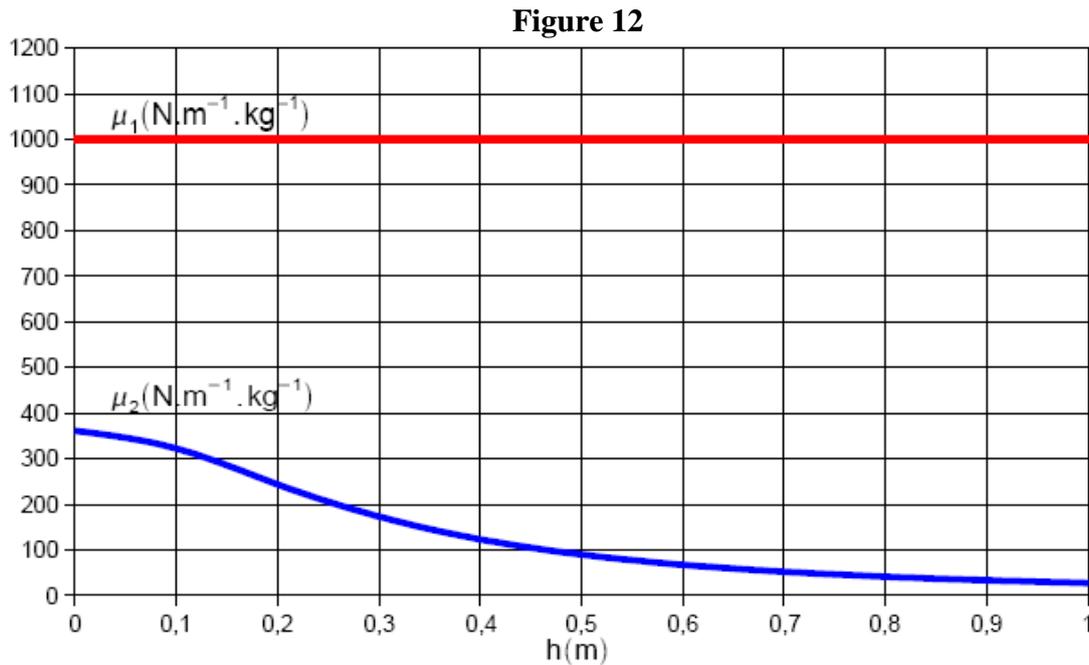
Question 8 : Déterminer les expressions de μ_1 et μ_2 en laissant h comme inconnue et effectuer les applications numériques en précisant leurs unités.

L'étude de la plateforme revient donc à étudier la fonction de transfert générique de la forme

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\mu}{p^2 + gp + \mu} \quad \text{où } S(p) \text{ représente la sortie } Z_8(p) \text{ ou } \theta_8(p) \text{ et } E(p) \text{ l'entrée } Z_7(p) \text{ ou } \theta_7(p) .$$

Question 9 : Exprimer, en fonction de μ , la condition que g doit vérifier pour qu'il n'y ait pas de résonance.

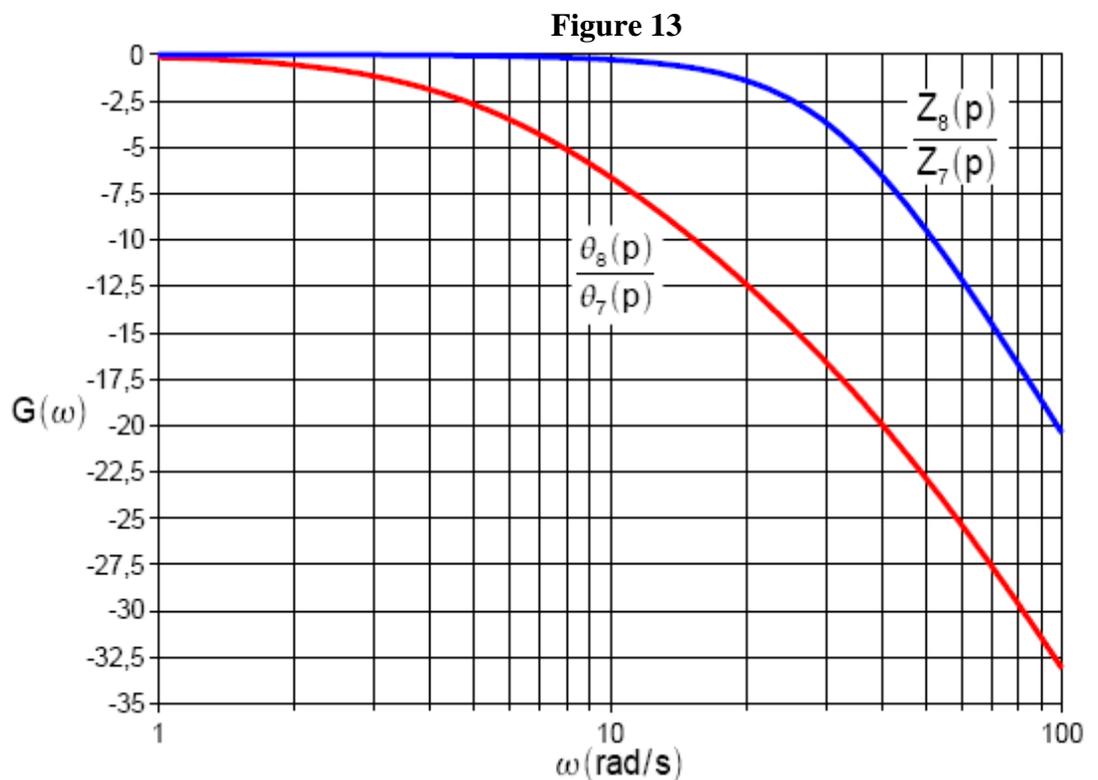
La figure 12 montre l'évolution de μ_1 et μ_2 , en fonction de h .



Question 10 : Déterminer la valeur de h qui permettrait, au mieux, de satisfaire la valeur de ωc pour chaque mouvement.

Pour des problèmes d'encombrement, le centre de gravité G_8 est situé à une altitude $h = 20$ cm.

Question 11 : Conclure quant à la capacité de la plateforme à satisfaire ou non le niveau « pas de résonance » de l'exigence du cahier des charges.



La figure 13 représente les diagrammes de Bode de $\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ et de $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}$ en gain.

Question 12 : A partir de la figure 13, lors d'un mouvement à 1,5 Hz, déterminer la diminution d'amplitude entre $\theta_8(t)$ et $\theta_7(t)$.

Cette diminution d'amplitude nécessite de modifier la boucle de rétroaction en force pour en améliorer les performances.

Afin d'améliorer encore plus les performances de la station spatiale d'observation, les ingénieurs de l'ESA ont décidé d'ajouter un correcteur de perturbation dans la chaîne directe de pilotage des vérins des plateformes.

Les performances attendues sont les suivantes : **écart nul pour une consigne ou une perturbation en échelon.**

On limite l'étude au mouvement de translation selon \vec{z}_7 entre les embases supérieure et inférieure de la plateforme.

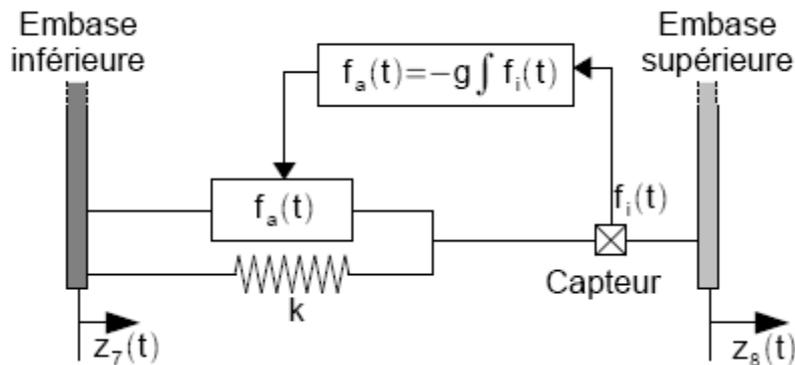


Figure 14 : Mouvement de translation étudié, avec amortissement actif par rétroaction en force.

Le schéma bloc de l'asservissement est représenté sur la figure 15. k , M et g sont des constantes. Le schéma bloc à retour unitaire équivalent (avec la fonction de transfert en boucle ouverte $H_0(p)$) est représenté sur la figure 16.

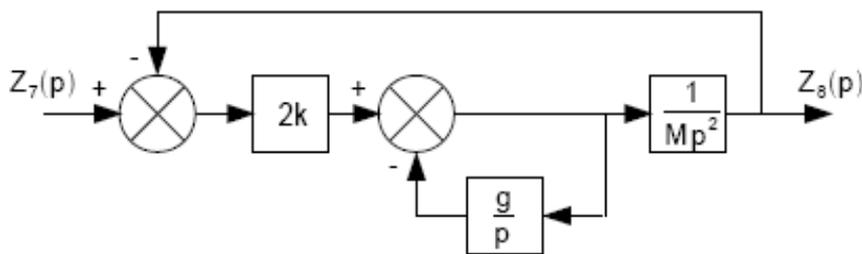


Figure 15 : schéma bloc de l'asservissement.

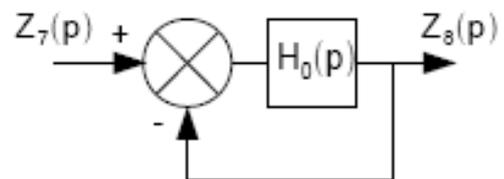


Figure 16 : schéma bloc à retour unitaire

Question 13 : Déterminer l'expression de $H_0(p)$ pour que les schémas blocs des figures 15 et 16 soient équivalents.

Question 14 : Déterminer l'écart en régime permanent pour une entrée en échelon. Conclure sur le choix du correcteur.