Programme de colle - semaine 24 du 08/04/2024 au 14/04/2024

1 Intégrales

Pas de démonstration sauf (*)

- Fonction en escalier, intégrale d'une fonction en escalier, propriétés (ne pas interroger dessus). Fonction continue par morceaux (uniquement la définition à savoir).
- Ne pas interroger sur les notions suivantes : fonction uniformément continue (notion au programme mais introduite uniquement en vue de définir l'intégrale). Théorème de Heine (admis). Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

- Positivité, croissance, $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$: énoncés précis à connaître.

Fonction positive d'intégrale nulle (*).

- Intégrale fonction de la borne supérieure (théorème fondamental de l'intégration).
- Formule de Taylor avec reste intégral (*). Inégalité de Taylor-Lagrange (*). *L'égalité de Taylor-Lagrange n'est pas au programme.*
- Non revu dans ce chapitre mais à connaître : intégration par parties, changement de variable.
- Méthode des rectangles : seule celle à gauche est officiellement au programme :

$$\text{Si } f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \text{ alors } \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

Interprétation géométrique de cette propriété (faire un dessin clair).

La démonstration a été vue pour f de classe $\mathcal{C}^1$ (voir exercice plus bas).

- Méthode des trapèzes : faire un dessin et écrire la somme. Aucun résultat théorique à connaître.

2 Exercices

Ces exercices ont tous été faits, mais ne pas s'acharner dessus, laisser du temps pour d'autres exercices progressifs.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{t+1}{t^2 + \cos t} dt$ (en faisant un encadrement) *Ou une autre du même style*

2. Développement en série entière de $\ln(1+x)$

Il est possible aussi de le faire avec la fonction exp entre 0 et x avec $x > 0$ (vu en cours).

- a) Soit $x > 0$ fixé dans tout l'exercice. Appliquer une des deux formules de Taylor à $\ln$ entre 1 et $1+x$ à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

On explicitera toutes les dérivées de $\ln$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. Montrer que $|\ln(1+x) - u_n| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$

- c) On suppose que $x \in]0, 1[$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

3. Méthode des rectangles

Peut servir de question de cours.

On considère une fonction f continue sur $[a, b]$ et une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$.

- a) Expliquer la méthode des rectangles à gauche : faire un dessin et donner l'expression de la somme de Riemann (notée u_n par la suite).

- b) Dans la suite, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
 Expliquer pourquoi il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit M -lipschitzienne.
- c) Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note Δ_k l'erreur commise en prenant $(a_{k+1} - a_k)f(a_k)$ comme approximation de $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$:

$$\Delta_k = (a_{k+1} - a_k)f(a_k) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$$

Montrer que $|\Delta_k| \leq M \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2}$.

On écrit Δ_k sous la forme d'une seule intégrale.

- d) Dans le cas où $(a_0, \dots, a_n)$ est une subdivision régulière ($a_k = a + k \frac{b-a}{n}$), majorer l'erreur totale $\left| u_n - \int_a^b f \right|$ et conclure.

4. CCINP exo 56 (ancien)

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- a) Montrer que H est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- b) Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite en $x = 1$.
- c) En utilisant la fonction u de la question b), calculer la limite en 1^+ de la fonction H .