

Programme de colle - semaine 26 du 13/05/2024 au 19/05/2024

1 Séries numériques

Seuls les démonstrations marquées d'un (*) sont à savoir. Se concentrer sur la pratique et demander des énoncés précis des théorèmes.

Donner à tout le monde un "exo-minute" consistant à appliquer un critère du cours (\leq , \sim , $o(\cdot)$, $O(\cdot)$, convergence absolue ou série alternée).

En gras, les résultats les plus importants.

- Suite des sommes partielles d'une suite numérique (à valeurs complexes). Convergence d'une série. Somme d'une série convergente. Relation de Chasles. Reste d'ordre n .

La nature de la série ne dépend pas du rang initial et n'est pas modifiée quand on change un nombre fini de termes.

- Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0 (*).
La condition n'est pas suffisante (connaître au moins 2 contre-exemples). Divergence grossière.
- Somme télescopique, équivalence entre la convergence de (u_n) et de $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$.
- Série géométrique $\sum_n q^n$ ($q \in \mathbb{C}$). Convergence ssi $|q| < 1$ (*). Valeur de la somme si convergence.

- Série exponentielle : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ (convergence de la série pour tout $z \in \mathbb{C}$) (démonstration à savoir dans le cas où $z \in \mathbb{R}^+$ en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange).

- Suites à termes positifs : la série converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Comparaison de deux séries à termes positifs : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum_n v_n$ converge, alors

$\sum_n u_n$ aussi.

- Convergence absolue. **Elle entraîne la convergence** : si $\sum_n |u_n|$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge et

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$

- **Utilisation des équivalents** : si $u_n \sim v_n \geq 0$, alors $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature (*).

- **Utilisation des $o(\cdot)$, $O(\cdot)$** : si $u_n = O(v_n)$, $v_n \geq 0$ et $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ CVA.

- Comparaison série-intégrale : pas de propriété au programme, juste la méthode à connaître : pour f continue monotone, comparer $f(k)$, $\int_k^{k+1} f(t) dt$ et $f(k+1)$, et sommer (entre des bornes finies) pour en déduire un encadrement des sommes partielles.

- **Série de Riemann** $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$: converge ssi $\alpha > 1$.

(*) : ne pas aller jusqu'au bout de la démonstration mais pour $\alpha > 0$, être capable d'écrire un encadrement des sommes partielles entre des intégrales puis, dans le cas où $\alpha = 1$, en déduire un équivalent de S_n .

- **Série alternée** : si (v_n) est décroissante et tend vers 0, alors $\sum_n (-1)^n v_n$ converge (*). Signe de la somme et majoration de la valeur absolue de la somme par celle du premier terme (pas d'exercice fait sur ces deux derniers points).

L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

2 Exercices

Ne pas passer trop de temps dessus.

1. CCINP exo 7

- a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs.
 On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang.
 Montrer que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

- b) Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}$$

2. CCINP exo 46

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$.

- a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.
- b) En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ converge.
- c) $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ converge-t-elle absolument ?

3. CCINP exo 5

Exercice long, on n'en donnera qu'une partie. Plusieurs possibilités :

- Admettre le résultat du a)ii) puis donner le b).
- Demander seulement le a). Pour le a)ii), après avoir trouvé l'encadrement entre sommes partielles et intégrales pour α quelconque, n'étudier la nature de la série que pour $\alpha = 1$.
 On pourra admettre que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

- a) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Cas $\alpha \leq 0$

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

- ii) Cas $\alpha > 0$

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

- b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$