

**Programme de colle - semaine 27 du 20/05/2024 au 26/05/2024**

## 1 Probabilités (sans variable aléatoire)

- Expérience aléatoire, événement, univers, système complet d'événements.
- Probabilité (sur un ensemble fini) : définition. Espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbf{P})$ . Propriétés (complémentaire, réunion, croissance, ...). La formule du crible est hors-programme. Détermination d'une probabilité sur les singletons. Équiprobabilité.
- Probabilité conditionnelle : définition, propriétés. Si  $B$  est un événement tel que  $\mathbf{P}(B) \neq 0$ , alors  $\mathbf{P}_B$  est une probabilité sur  $\Omega$ .
- Formule des probabilités totales (2 formes : intersections et probabilités conditionnelles). Par convention, si  $\mathbf{P}(B) = 0$ , on pose  $\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) = 0$ .
- Formule de Bayes.
- Formule des probabilités composées.
- Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de  $n$  événements ( $n \geq 3$ ).

## 2 Exercices

### 1. Exo CCINP 105

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
- On dispose de 100 dés dont 25 pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut  $\frac{1}{2}$ .

- On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé ?
- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.

### 2. D'après exo CCINP 101 *Ne pas passer trop de temps sur la partie algèbre linéaire*

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

À l'instant  $t = 0$ , il se trouve au point  $A$ .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On note  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) l'événement "l'animal est en  $A$  (resp.  $B, C$ ) après son  $n^e$  trajet."

On pose  $\mathbf{P}(A_n) = a_n$ ,  $\mathbf{P}(B_n) = b_n$  et  $\mathbf{P}(C_n) = c_n$ .

- Exprimer, en le justifiant,  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n$  et  $c_n$ .
  - Exprimer, de même,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n$  et  $c_n$ .

b) On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $\text{Ker}(A + \frac{1}{2}I_3)$  n'est pas réduit à  $\{\vec{0}\}$  et en donner une base.

ii) Montrer que  $A$  est semblable à une matrice  $D$  diagonale de la forme  $D = \text{diag}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \alpha\right)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  à déterminer.

iii) Déterminer une matrice  $P$  inversible telle que  $D = P^{-1}AP$ .

**Remarque :** le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas demandé.

c) Montrer comment les résultats de la question b) peuvent être utilisés pour calculer  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .

**Remarque :** aucune expression finalisée de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  n'est demandée.

### 3. Exo CCINP 107

*On peut modifier les données.*

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'urne  $U_1$  contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne  $U_2$  contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_1$ .

Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'événement "la boule tirée au  $n^{\text{e}}$  tirage est blanche". et on pose  $p_n = \mathbf{P}(B_n)$ .

a) Calculer  $p_1$ .

b) Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ .

c) En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la valeur de  $p_n$ .