

Programme de colle - semaine 28 du 27/05/2024 au 02/06/2024

1 Déterminant

Pas de démonstration, sauf pour les points marqués d'un (*). **En gras**, les notions les plus importantes.

On met l'accent sur la pratique et la compréhension des propriétés élémentaires.

- **Forme n -linéaire alternée** : définition, nullité sur une famille liée (*).
Forme n -linéaire antisymétrique, alternée $\Rightarrow$ antisymétrique (*).
- Déterminant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: c'est l'unique forme n -linéaire alternée des colonnes telle que $\det(I_n) = 1$ (existence et unicité admises).
- **Effet des opérations sur les colonnes sur le déterminant** : $C_i \leftarrow \alpha C_i$, $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$, $C_i \leftrightarrow C_j$.
- **Déterminant d'une matrice triangulaire**.
- Déterminant d'un produit, **caractérisation de l'inversibilité** (*). Deux matrices semblables ont le même déterminant (réciproque fausse).
- Déterminant d'une transposée. **Effet des opérations sur les lignes sur le déterminant**.
- **Cofacteurs, développement suivant une ligne / colonne**. Comatrice
 $A \cdot (\text{com } A)^\top = (\text{com } A)^\top \cdot A = (\det A) I_n$.
La formule dite "règle de Sarrus" n'est pas au programme ni utile.
- Déterminant de Vandermonde.
- Déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (E : EV de dimension finie) : c'est le déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base de E (ne dépend pas du choix de la base).
Déterminant de Id_E , $f \circ g$, λf .
Caractérisation des automorphismes.
- Déterminant d'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ de E ($n = \dim E$) :
 $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.
 $\det_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire alternée, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
Caractérisation des bases : $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.
Changement de base : $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$.
- Pour information (n'interroger sur ce qui suit que si tout le reste est maîtrisé) :
Groupe symétrique : cycles, transposition. Décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
Signature.
Expression du déterminant d'une matrice sous forme d'une somme sur les permutations.

2 Exercices

1. **D'après CCINP ancien exo 63** (possibilité de changer les coefficients)

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carré d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on note D_n le déterminant de A_n .

- a) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
- b) Déterminer D_n en fonction de n .
- c) Existe-t-il un vecteur colonne X non nul telle que $A_n X = 0$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $b \neq c$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a , les coefficients au-dessus de la diagonale ($i < j$) valent b , ceux sous la diagonale ($i > j$) valent c .

Soit $B(x)$ la matrice obtenue à partir de A en ajoutant x à tous les coefficients, et soit $d(x) = \det B(x)$.

- a) Sans faire de calcul explicite, en faisant des opérations et un développement, montrer que la fonction d est affine.
- b) En déduire une expression explicite de d puis calculer $\det A$.
- c) **Bonus** : comment obtenir $\det A$ quand $b = c$?

3. a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- i) Il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $MX = \lambda X$.
- ii) $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

- b) (Possibilité de changer la matrice M , mais ça doit rester simple. On peut la prendre de taille 2.)

On prend $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- i) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(M - \lambda I_3)$ (le donner sous forme la plus factorisée possible).
- ii) Dire pour quelles valeurs de λ l'équation $MX = \lambda X$ a des solutions non nulles, et dans chaque cas donner une base de l'ensemble des solutions.
- iii) Montrer que M est semblable à une matrice diagonale.
On pourra considérer l'endomorphisme canoniquement associé à M , puis sa matrice dans deux bases bien choisies.