

## Problème N°1 :

**Q1 :** En supposant la liaison L2-3 parfaite, glissière de direction  $\vec{z}$ , la résultante de l'action de liaison vérifie  $\vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = 0$ . \*

En isolant S3, le théorème de la résultante statique (applicable en quasi-statique), en projection sur  $\vec{z}$ , donne alors :  $2F_w + F_{sol} - mg = 0$ , soit  $F_{sol} = mg - 2F_w$ .

Sous ces hypothèses, la mesure de  $F_w$  permet de déterminer  $F_{sol}$  si  $m$  est connu.

$$* \text{ en un point } P, \{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{pmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ 0 & N_{23} \end{pmatrix}_{P,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} .$$

**Q2 :** Isolons  $\Sigma$ , soumis aux actions mécaniques extérieures

- du sol sur (3),
- du poids sur  $\Sigma$  en G,
- des actions de contact en I et en J.

Le théorème du moment statique en O, projeté sur  $\vec{y}$  donne :  $\overrightarrow{M_{O,sol \rightarrow 3}} \cdot \vec{y} + \overrightarrow{M_{O,pes \rightarrow \Sigma}} \cdot \vec{y} + a F_g - a F_d = 0$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_{O,sol \rightarrow 3}} = \vec{0} + (\overrightarrow{OF} \wedge F_{sol} \vec{z}) = F_{sol} (R \vec{x}_2) \wedge \vec{z} = -F_{sol} R \vec{y}_2$$

$$\text{soit } \overrightarrow{M_{O,sol \rightarrow 3}} \cdot \vec{y} = -F_{sol} R \cos \theta$$

$$\text{et } \overrightarrow{M_{O,pes \rightarrow \Sigma}} \cdot \vec{y} = 0 + (\overrightarrow{OG} \wedge (-Mg) \vec{z}) \cdot \vec{y} = Mg r \cos \theta$$

$$\text{D'où : } -F_{sol} R \cos \theta + Mg r \cos \theta + a F_g - a F_d = 0 \text{ (i).}$$

Le théorème de la résultante statique en projection sur  $\vec{z}$  donne :  $F_g + F_d + F_{sol} - Mg = 0$  (ii).

$$\text{a(ii)+(i) donne } F_{sol} (a - R \cos \theta) - Mg (a - r \cos \theta) + 2a F_g = 0,$$

$$\text{soit } F_g = F_{sol} \frac{R \cos \theta - a}{2a} + Mg \frac{a - r \cos \theta}{2a}$$

$$\text{a(ii) - (i) donne aussi : } F_d = -F_{sol} \frac{R \cos \theta + a}{2a} + Mg \frac{a + r \cos \theta}{2a}.$$

**Q3 :** Par hypothèse,  $F_{sol}$  est nul et  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Le basculement induit une perte de contact en I (chenille gauche). Il y a basculement si :  $F_g = 0$ .

La condition de non basculement s'écrit alors :  $F_g > 0$ , soit  $Mg \frac{a - r \cos \theta}{2a} > 0$ , soit :  $r \cos \theta < a$ .

La projection sur le sol de G, centre de gravité de l'ensemble porté par le châssis, doit être situé entre les 2 chenilles.

$b_0$  est la distance de G au plan médian  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ ,  $|r \cos \theta|$ , en proportion de la distance au plan médian de la chenille,  $a$ . D'où le résultat  $b_0 = 100 \frac{|r \cos \theta|}{a}$ .

**Q4 :** L'exigence 1.2 impose  $b_0 < 0,5$ , outil levé ( $F_{sol} = 0$ ) et dans le cas le plus défavorable, soit pour  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .

On obtient :  $r < 0,5a$ .

G est le barycentre du système  $\{(G_t, m_t), (G_e, m_e), (G_c, m_c)\}$  et vérifie  $(m_t + m_e + m_c) \overrightarrow{OG} = m_t \overrightarrow{OG_t} + m_e \overrightarrow{OG_e} + m_c \overrightarrow{OG_c}$ .

$$\text{En projection sur } \vec{x} : (m_c + m_e + m_t)r = 4,4m_e - 4,3m_c \quad \text{soit } r = \frac{4,4m_e - 4,3m_c}{m_c + m_e + m_t}$$

En en déduit :  $m_c = \frac{4,4m_e - (m_e + m_t)r}{r + 4,3}$ , avec  $m_c = n_{cp} \times m_1$  et  $n_{cp}$  valeur entière et  $r < 0,5a$ .

D'où la condition :  $n_{cp} \geq \frac{4,4m_e - (m_e + m_t)0,5a}{(0,5a + 4,3)m_1}$ . Application numérique :  $n_{cp} \geq 2,7$ , soit  $n_{cp} = 3$ .

**Q5 :** Par définition,  $F_{eq}$  vérifie :  $F_{eq}\vec{z} = F_{sol}\vec{z} - Mg\vec{z}$ , d'où  $F_{eq} = F_{sol} - Mg$  avec  $F_{sol} = mg - 2F_w$ .

On obtient :  $F_{eq} = -(M - m)g - 2F_w$ .

La position de E vérifie :  $\overrightarrow{M_{E,eq \rightarrow f}(E)} = \overrightarrow{M_{E,sol \rightarrow 3}(E)} + \overrightarrow{M_{E,pes \rightarrow \Sigma}(E)} = \vec{0}$ .

avec :  $\overrightarrow{M_{E,sol \rightarrow 3}(E)} = -(R - e)F_{sol}\vec{y}_2$  et  $\overrightarrow{M_{E,pes \rightarrow \Sigma}(E)} = -(e - r)Mg\vec{y}_2$ .

En projection sur  $\vec{y}_2$ , on obtient :  $e = \frac{RF_{sol} - rMg}{F_{sol} - Mg}$ , soit  $e = \frac{R(mg - 2F_w) - rMg}{-(M - m)g - 2F_w}$

**Q6 :** L'action élémentaire est un glisseur qui passe par P.  $\overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = \left(A\frac{y}{L} + B\right) dx dy \vec{z}$

Et :  $\overrightarrow{dM_{O,0 \rightarrow cg}(P)} = \vec{0} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = (x\vec{x} + y\vec{y}) \wedge \left(A\frac{y}{L} + B\right) dx dy \vec{z}$ . On obtient :

$$\overrightarrow{dM_{O,0 \rightarrow cg}(P)} = \left(A\frac{y}{L} + B\right) (y\vec{x} - x\vec{y}) dx dy$$

**Q7 :** Par intégration sur la surface de contact sol / chenille gauche :

$$\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = \vec{z} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{a-l/2}^{a+l/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) dx dy = \vec{z} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) dy \int_{-a-l/2}^{-a+l/2} dx$$

D'où  $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}} = \vec{z} l \left[\frac{A}{2L}y^2 + By\right]_{-L/2}^{L/2} \Rightarrow \overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}} = LlB\vec{z}$

Pour le moment en O :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow cg}} &= \iint_{\Sigma} \overrightarrow{dM_{O,0 \rightarrow cg}(P)} = \vec{x} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{a-l/2}^{a+l/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) y dx dy - \vec{y} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-a-l/2}^{-a+l/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) x dx dy \\ &= \vec{x} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) y dy \int_{-a-l/2}^{-a+l/2} dx - \vec{y} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) dy \int_{-a-l/2}^{-a+l/2} x dx \\ &= \vec{x} l \left[\frac{A}{3L}y^3 + \frac{B}{2}y^2\right]_{-L/2}^{L/2} - \vec{y} \left[\frac{A}{2L}y^2 + By\right]_{-L/2}^{L/2} \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a-l/2}^{-a+l/2} \end{aligned}$$

On obtient :  $\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow cg}} = \frac{lL^2}{12} A\vec{x} + allB\vec{y}$

**Q8 :** Dans l'ordre :

- théorème de la résultante statique en projection sur  $\vec{z}$  ;
- théorème du moment statique en O, en projection sur  $\vec{x}$  ;
- théorème du moment statique en O, en projection sur  $\vec{y}$

appliqués à l'ensemble  $\Sigma$ .

**Q9 :** En notant (i), (ii) et (iii) les 3 équations (1).

- avec  $A = C$ , (ii) donne :  $A = \frac{-F_{eq} 6e \sin \theta}{lL}$ ,
- (i)+(iii) donne :  $D = \frac{-F_{eq}}{2lL} \left(1 + \frac{e \cos \theta}{a}\right)$ ,
- (i)-(iii) donne :  $B = \frac{-F_{eq}}{2lL} \left(1 - \frac{e \cos \theta}{a}\right)$ .

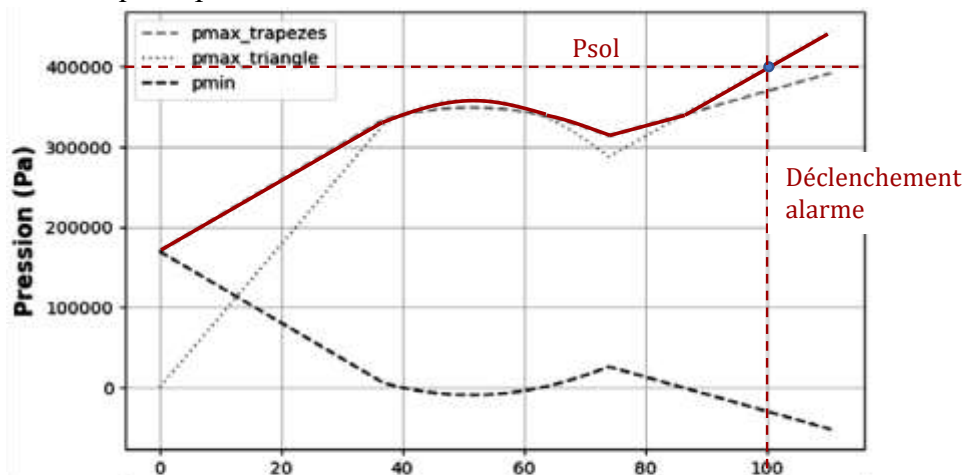
Si  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $p_{max} = D + |A/2|$ , sinon  $p_{max} = B + |A/2|$ . Dans les deux cas, on trouve la relation

demandée :  $p_{max} = \frac{-F_{eq}}{2lL} \left(1 + \frac{e|\cos \theta|}{a} + \frac{6e|\sin \theta|}{L}\right)$ .

**Q10 :** La pression maximale admissible pour le gravier compact est de 400 kPa.

L'indicateur b% reste en dessous la valeur de déclenchement de l'alarme.

L'alarme se déclenche lorsque la pression calculée atteint 400 000 Pa, soit à l'instant 100 s.



**Q11 :** Les indicateurs contrôlent indépendamment le risque de basculement et le risque d'enfoncement dans le sol.

$$\mathbf{Q12 : } \overrightarrow{V(I, 4/0)} = \overrightarrow{V(I, 4/3)} + \overrightarrow{V(I, 3/cable)} + \overrightarrow{V(I, cable/0)}$$

Avec

- mouvement de rotation de 4 par rapport à 3 d'axe  $(C, \vec{y})$ ,  

$$\overrightarrow{V(I, 4/3)} = \overrightarrow{V(C, 4/3)} + \vec{IC} \wedge \omega_{4/3} \vec{y} = \vec{0} - R_3 \vec{x} \wedge (-\omega_3 \vec{y}) = R_3 \omega_3 \vec{z}$$
- non glissement du câble sur la poulie,  $\overrightarrow{V(I, 3/cable)} = \vec{0}$
- câble attaché en O, donc fixe par rapport à 0,  $\overrightarrow{V(I, cable/0)} = \vec{0}$

D'où :  $\overrightarrow{V(I, 4/0)} \cdot \vec{z} = R_3 \omega_3$ .

De plus, le mouvement de 4 par rapport à 0 est une translation :  $\overrightarrow{V(I, 4/0)} \cdot \vec{z} = \overrightarrow{V(D, 4/0)} \cdot \vec{z} = V$ .

**Q13 :** on a  $V = -R_3 \omega_3 + R_1 \omega_1$  et  $V = R_3 \omega_3$ . En remplaçant, on obtient :  $V = \frac{R_1}{2} \omega_1$ , soit :  $R_{eq} = \frac{R_1}{2}$

$$\mathbf{Q14 : } \quad H_9 = k_r \quad H_{10} = \frac{2}{R_2} \quad H_{11} = K_{gen}$$

Bonus : la vitesse de translation de la table (V) est la moitié de celle du câble par rapport à 0 (notons-là  $V_c$ ). Vu en Q13. Au niveau de la poulie 2, on traduit le RSG («  $V=R.\omega$  ») :  $V_c = R_2 \cdot \omega_2 = 2.V$  d'où  $\omega_2 = \frac{2}{R_2} V$  et l'expression de  $H_{10}$ .

**Q15 :** Les ressorts étant en parallèle, les allongements sont tous identiques. L'actions du ressort équivalent est la somme des actions de chacun des ressorts :  $\overrightarrow{F_{nr}} = \sum_{i=1}^n k(\Delta z_0 - \Delta z) \vec{z} = n k(\Delta z_0 - \Delta z) \vec{z}$ .

Par identification on trouve  $k_T = n k$ . De même, pour les amortisseurs :  $\lambda_T = n \lambda$ .

**Q16 :** Isolons (5), soumis aux actions mécaniques extérieures du poids  $M_K g$ , des ressorts et amortisseurs et de la liaison glissière 4-5.

A l'équilibre, le théorème de la résultante statique en projection sur  $\vec{z}$  donne :

$$-M_K g - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) + \lambda_T \Delta \dot{z} + F_{sol} = 0, \text{ avec } \Delta \dot{z} = 0 \text{ à l'équilibre et } F_{sol} = 0 \text{ car le système est suspendu.}$$

$$\text{D'où : } -M_K g - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = 0$$

Isolons (4+5), soumis aux actions mécaniques extérieures des poids sur (4) et (5), des câbles et de la liaison glissière 4-0.

A l'équilibre, le théorème de la résultante statique en projection sur  $\vec{z}$  donne :  $2F_{we} - (M_T + M_K)g = 0$

**Q17:** Les actions mécaniques extérieures à 4 proviennent des câbles, de son poids, des ressorts et amortisseurs et des liaisons glissières avec 0 et 5.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur  $\vec{z}$  donne :

$$M_T \ddot{z}_4 = 2F_w - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z) - \lambda_T \Delta \dot{z}$$

**Q18 :** Avec le changement de variable proposé :  $\Delta z = z_4 - z_5 = \hat{z}_4 - \hat{z}_5 + \Delta z_e$ .

L'équation de la question précédente devient :

$$\begin{aligned} M_T \ddot{\hat{z}}_4 &= 2F_{we} + \delta F_w - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \hat{z}_4 + \hat{z}_5 - \Delta z_e) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) \\ \Leftrightarrow M_T \ddot{\hat{z}}_4 &= 2F_{we} - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) + \delta F_w + k_T(-\hat{z}_4 + \hat{z}_5) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) \end{aligned}$$

Avec, à l'équilibre :  $2F_{we} - M_T g = M_K g$ , soit  $2F_{we} - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = M_K g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = 0$ .

D'où, par rapport à la position d'équilibre :  $M_T \ddot{\hat{z}}_4 = \delta F_w + k_T(-\hat{z}_4 + \hat{z}_5) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$ .

En regroupant les termes, on obtient la première équation recherchée :  $M_T \ddot{\hat{z}}_4 + \lambda_T \dot{\hat{z}}_4 + k_T \hat{z}_4 = \lambda_T \dot{\hat{z}}_5 + k_T \hat{z}_5 + \delta F_w$ .

**Q19 :** L'équation donnée dans le sujet, s'écrit, après changement de variables :

$$\begin{aligned} M_K \ddot{\hat{z}}_5 &= F_{sol} - k_T(\Delta z_0 - \hat{z}_4 + \hat{z}_5 - \Delta z_e) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) - M_K g \\ \Leftrightarrow M_K \ddot{\hat{z}}_5 &= 2F_{sol} - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) - M_K g - k_T(\hat{z}_5 - \hat{z}_4) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) \end{aligned}$$

A l'équilibre,  $-k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) - M_K g = 0$ , d'où  $M_K \ddot{\hat{z}}_5 = 2F_{sol} - k_T(\hat{z}_5 - \hat{z}_4) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$ .

En regroupant les termes, on obtient la deuxième équation recherchée.

La première équation donne :  $Z_4(p)(M_T p^2 + \lambda_T p + k_T) = (k_T + \lambda_T p)Z_5(p) + \Delta F_w(p)$ .

De plus,  $v(t) = \frac{dz_4(t)}{dt}$ , soit  $Z_4(p) = \frac{V(p)}{p}$ .

On obtient  $\Delta F_w(p) = \frac{k_T + \lambda_T p + M_T p^2}{p} V(p) - (k_T + \lambda_T p)Z_5(p)$  (i)

On en déduit  $H_8(p) = \frac{k_T + \lambda_T p + M_T p^2}{p}$

La deuxième équation donne :  $Z_5(p) = \frac{1}{k_T + \lambda_T p + M_K p^2} \left[ (k_T + \lambda_T p) \frac{V(p)}{p} + F_{sol}(p) \right]$ .

On en déduit  $H_6(p) = \frac{k_T + \lambda_T p}{p}$  Et, en remplaçant  $Z_5(p)$  dans (i) :  $H_7(p) = \frac{k_T + \lambda_T p}{k_T + \lambda_T p + M_K p^2}$

**Q20 :** On obtient :

$$\begin{aligned} Q_p(p) &= K_s U_s(p) \\ \frac{V_0}{B} p \Delta P(p) &= Q_p(p) - Q_m(p) \\ Q_m(p) &= C_Y \Omega_m(p) \\ C_m(p) &= C_Y \Delta P(p) \\ (a + J_{eq} p) \Omega_m(p) &= C_m(p) - C_r(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1(p) &= K_s \\ H_2(p) &= \frac{B}{V_0 p} \\ H_3(p) &= C_Y \\ H_4(p) &= C_Y \\ H_5(p) &= \frac{1}{a + J_{eq} p} \end{aligned}$$

**Q21 :**  $K_{ihm}$  permet de s'assurer qu'en régime permanent, l'image de l'erreur  $\epsilon_V$  est nulle lorsque l'erreur est nulle, qu'elle que soit la consigne.

Condition vérifiée si  $\boxed{K_{ihm} = K_{gen} \frac{2}{R_2}}$ .

Q22 :

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_s(p)} = H_1(p) \frac{H_2(p) H_3(p) H_5(p)}{1 + H_2(p) H_3(p) H_4(p) H_5(p)}$$

Q23 :

$$G_{BO}(p) = \frac{K_0 K_p K_h}{1 + \frac{2z_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2}}$$

Q24 : La fonction de transfert en boucle ouverte est d'ordre 2 et de classe 0.

Le modèle est stable, mais l'erreur statique n'est pas nulle. L'exigence 2.1.1 ne peut être satisfaite.

Q25 :  $C(p) = K_p \frac{1+T_i p}{p}$  et  $G_{BO}(p) = \frac{K_0 K_p K_h (1+T_i p)}{p \left(1 + \frac{2z_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2}\right)}$ , d'ordre 3 et de classe 1.

Si le modèle est stable, l'erreur statique sera nulle. L'exigence de précision est satisfaite.

Justification par le calcul :

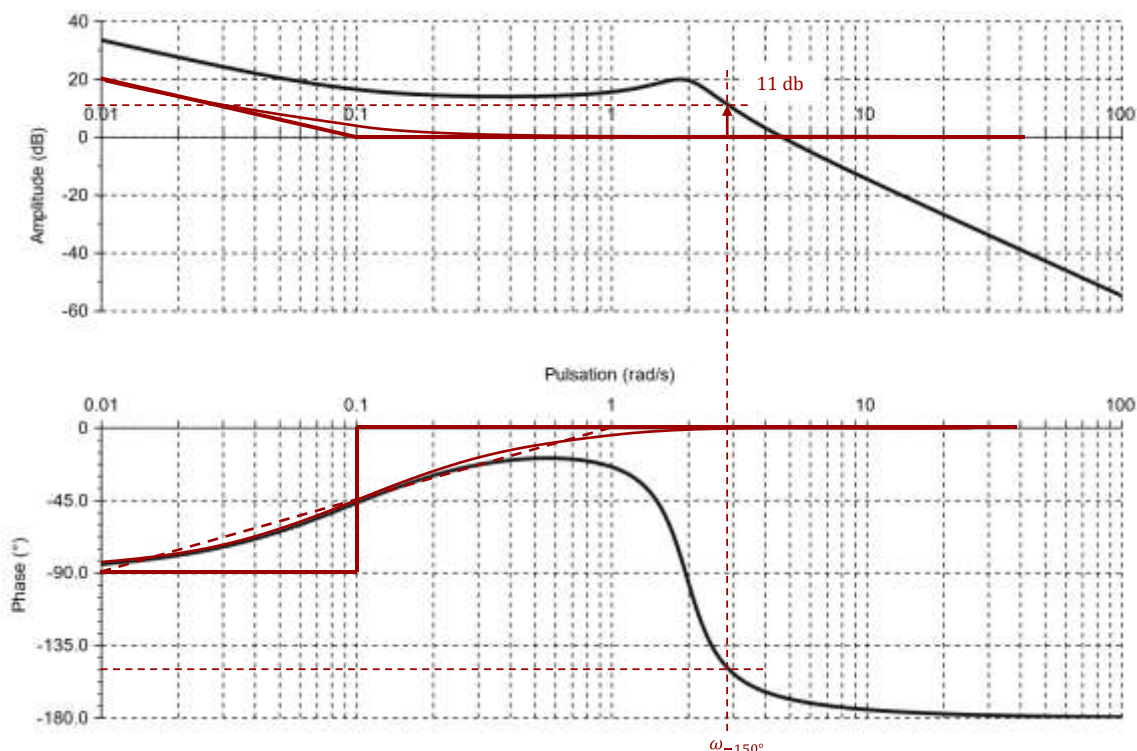
$$\begin{aligned} \text{Ecart statique : } \varepsilon_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} (V_c(t) - V(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p (V_c(p) - V(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{1}{p} - F_{tbf}(p) \frac{1}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{G_{BO}(p)}{1 + G_{BO}(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + G_{BO}(p)} \right) = 0 \text{ si classe } G_{BO} \geq 1, \neq 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Q26 : Avec  $K_p = 1$  et  $T_i = 10$  s,  $C(p) = \frac{1}{10p} (1 + 10p)$ .

Comportement asymptotique :

- aux basses fréquences : asymptote du gain de pente -20 dB/décade passant par le point (1/10 rad/s, 0dB) ; phase à -90° ;
- pulsation de cassure à 0,1 rad/s. A cette valeur, le gain réel est 3dB au-dessus du point de cassure, la phase vaut -45° ;
- aux hautes fréquences : asymptote horizontale pour le gain à 0 dB ; phase à 0°.

La courbe réelle de phase passe aussi à -84° pour 0,01 rad/s et à 6° pour 1 rad/s.



**Q27 :** La marge de phase attendue est de  $30^\circ$ , correspondant à une phase de  $-150^\circ$ . Pour la pulsation  $\omega_{-150^\circ}$  correspondante, le gain est de 11 dB.

Pour obtenir la marge de phase demandée, il faut descendre la courbe de gain de 11 dB correspondant à un correcteur de gain  $K_p = 10^{-11/20} \approx 0,28$ .

La phase n'atteignant pas  $-180^\circ$ , l'exigence sur la marge de gain est vérifiée.

**Q28 :** La présence d'un amortisseur a une influence positive sur la stabilité du système (la phase en pointillés est sensiblement plus élevée à haute fréquence) mais négative sur le temps de réponse (réduction sensible de la bande passante à 0 dB sur le gain en pointillés).

Le correcteur est bien choisi car il assure la précision statique en portant à 1 la classe de la FTBO (effet de l'intégrateur) tout en ne diminuant pas la phase en haute fréquence (effet du premier ordre au numérateur)

## Problème N°2:

**Q1 :**

**Q2 :** TMS ( $A, \vec{y}_0$ ) à la roue avant :

$$r' \cdot Z_P = (r - d) \cdot X_P$$

**Q3 :** TRS :  $X_P = X_M$        $Z_P + Z_M = Mg$       d'où  
 $r' \cdot (Mg - Z_M) = (r - d)X_M$

**Q4 :** TMS ( $P, \vec{y}_0$ ) à S :

$$(1 + e + r')Z_M - dX_M - (e + r')Mg = 0$$

**Q5 :** D'après la question 7 :  $Mg = \left(\frac{r-d}{r'}\right)X_M + Z_M$

Ce qui donne avec l'équation de la question 8 :

$$|Z_M + \left(\frac{ed}{r} - \frac{er}{r'} - r\right)X_M = 0 \Rightarrow \frac{X_M}{Z_M} = \frac{l \cdot r'}{e \cdot r + r \cdot r' - de} = 0.69 < 0,8$$

Il y a non glissement donc adhérence. L'obstacle est franchissable.

**Q6 :**

La roue arrière qui est soumise à :

son poids (glisseur en O)

l'action du châssis du fauteuil dans la liaison pivot parfaite ( $O, \vec{y}_0$ )

l'action du sol en M

l'action de chaque motoréducteur (torseur couple  $-Cr \vec{y}_0$  avec  $Cr > 0$ )

TMS ( $O, \vec{y}_0$ ) à la roue arrière :  $-2Cr + R \cdot X_M = 0$  avec  $X_M = \frac{Mg \cdot r'}{r - d + 0.7r'} = 1396 \text{ N}$

D'où  $Cr = 279 \text{ Nm}$

