

## Exercice 1 : centre de gravité (à savoir faire mais rarement demandé aux concours)

Q1- On étudie les symétries pour commencer : par symétrie  $G \in (O, \vec{y})$

Il reste donc à calculer la composante suivant  $\vec{y}$  de  $\overrightarrow{OG}$ . On revient à la définition du centre de gravité.

Deux possibilités pour le calcul :

- soit la formule du barycentre si on arrive à décomposer le solide étudié en une association de solides à la géométrie classique :  $[(\sum m_i) \overrightarrow{OG}].\vec{y} = [\sum m_i \overrightarrow{OG}_i].\vec{y}$ 
  - $(\sum m_i)$  est la masse du solide étudié
  - $G_i$  sont les centres de gravités des solides formant le solide étudié
  - c'est la solution ici en décomposant la plaque trouée en un **demi-disque (Solide 1)** et un **rectangle (Solide 2)** de masse négative pour faire un trou.
- Soit la formule la plus générale lorsque la géométrie n'est pas classique :  $[m \overrightarrow{OG}].\vec{y} = [\int \overrightarrow{OM} dm].\vec{y}$ 
  - $m = \int dm$  est la masse du solide étudié
  - C'est la même formule que le barycentre mais en « sommant de manière infinie »
  - C'est nécessaire pour le centre de gravité du demi-disque ici.

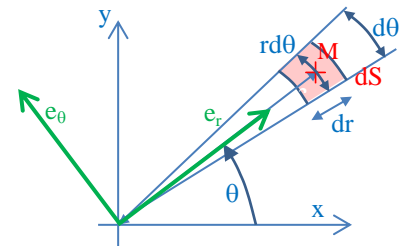
Formule barycentrique :  $(m_1 - m_2) \overrightarrow{OG}.\vec{y} = m_1 \overrightarrow{OG}_1.\vec{y} - m_2 \overrightarrow{OG}_2.\vec{y}$  (i)

- Détermination de  $y_{G1} = \overrightarrow{OG}_1.\vec{y}$  (par symétrie  $G_1 \in (O, \vec{y})$ ) :

Par la méthode intégrale :

On définit :

- $\rho$  la masse surfacique (en kg/m<sup>2</sup>) supposée constante car matériau homogène
- $r = \|\overrightarrow{OM}\|$  qui varie de 0 à R
- $\theta = (\vec{x}, \vec{e}_r)$  l'angle paramétrant la position de M (coordonnées polaires) variant de 0 à  $\pi$
- $dS = r.dr.d\theta$  la surface élémentaire



$$[m_1 \overrightarrow{OG}_1].\vec{y} = m_1 y_{G1} = [\int \overrightarrow{OM} dm].\vec{y} = \rho \iint r \cdot \vec{e}_r.\vec{y} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$m_1 \cdot y_{G1} = \rho \int_0^R \int_0^\pi r \cdot \sin \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \rho \cdot \frac{2 \cdot R^3}{3} \quad \text{or} \quad m_1 = \int dm = \int_0^R \int_0^\pi \rho \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \rho \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

soit  $y_{G1} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$  (paraît logique : un peu en dessous du milieu, du côté où il y a le plus de matière...)

- Détermination de  $y_{G2} = \overrightarrow{OG}_2.\vec{y}$  :  $y_{G2} = \frac{h}{2}$  et  $m_2 = \rho \cdot R \cdot h$

L'équation (i) donne :

$$\rho \left( \frac{R^2 \pi}{2} - R \cdot h \right) \cdot y_G = \rho \frac{R^2 \pi}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi} - \rho \cdot R \cdot h \cdot \frac{h}{2}$$

$$\text{d'où } y_G = \frac{\frac{4R^2}{3} - h^2}{R\pi - 2h}$$

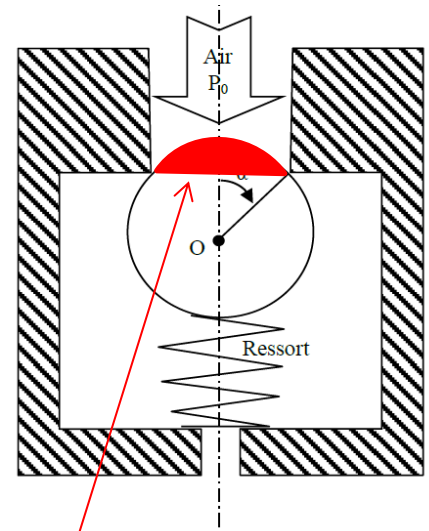
Remarque : autre solution en appliquant le 2<sup>ème</sup> théorème de Pappus par rotation autour de l'axe (O, x) ; le volume engendré étant une sphère moins un noyau cylindrique.

## Exercice 2 : clapet à bille

C'est un système de clapet utilisé dans bon nombre de systèmes de pompe. Le ressort qui pousse la bille vers le haut, empêche l'air de circuler vers le bas (petit orifice en bas). La bille (sphérique) obture la canalisation (grand orifice cylindrique en haut).

Si on augmente la pression  $P_0$  de l'air qui pousse vers le bas la bille, la force de pression de l'air sur la bille va permettre de comprimer le ressort et de libérer l'accès. La bille ne sera plus en contact avec la canalisation haute.

La raideur du ressort va permettre de définir la valeur de pression à partir de laquelle l'air peut circuler.



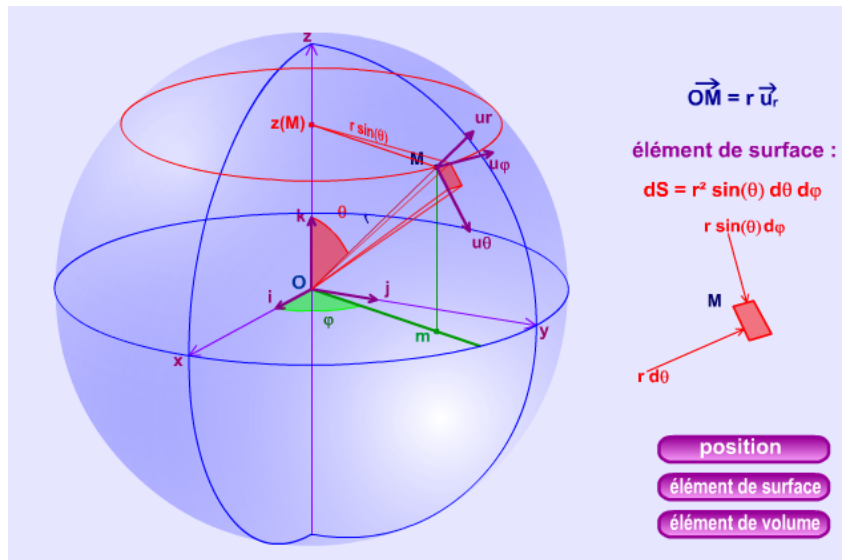
On reprend le cours :

$$\mathbf{T}(\text{air} \rightarrow \text{bille}) = \left. \begin{aligned} & \int_S -\mathbf{p}(\mathbf{M}) \mathbf{\bar{n}}(\mathbf{M}) dS \\ & \int_o \left[ -\mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}(\mathbf{M}) \mathbf{\bar{n}}(\mathbf{M}) dS \right] \end{aligned} \right\}$$

La surface de contact air/bille est la **calotte sphérique de demi angle au sommet  $\alpha$** .

On installe le paramétrage forcé en coordonnées sphériques :

- Le petit élément de surface est un petit morceau de la sphère.  
Pour « générer » la calotte sphérique :
  - $r = \text{cste} = R$
  - $\varphi \in [0; 2\pi]$
  - $\theta \in [0; \alpha]$
  - $dS = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$
- Pression constante :  $p_0$
- $\mathbf{\bar{n}}(\mathbf{M}) = -\mathbf{\bar{u}}_r$
- $\mathbf{\bar{u}}_r = \sin\theta \cdot \cos\varphi \mathbf{\bar{x}} + \sin\theta \cdot \sin\varphi \mathbf{\bar{y}} + \cos\theta \mathbf{\bar{z}}$



On commence par la résultante :

$$\overrightarrow{R_{air \rightarrow bille}} = \iint d\vec{F}(\mathbf{M}) = \iint d\vec{F}_n(\mathbf{M}) = \iint p_0 \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \mathbf{\bar{u}}_r$$

On ne peut pas faire le calcul de l'intégrale puisque  $\mathbf{\bar{u}}_r$  est dépendant des deux variables  $\varphi$  et  $\theta$ . Il faut projeter sur la base « fixe » ( $\mathbf{\bar{x}}, \mathbf{\bar{y}}, \mathbf{\bar{z}}$ ) pour traduire cette dépendance.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{air \rightarrow bille}} \cdot \mathbf{\bar{x}} &= p_0 \cdot R^2 \iint \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \mathbf{\bar{u}}_r \cdot \mathbf{\bar{x}} = p_0 \cdot R^2 \iint \sin^2\theta \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ &= p_0 \cdot R^2 \int_0^\alpha \sin^2\theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Interprétation : l'air ne produit pas de déplacement en translation suivant  $\mathbf{\bar{x}}$  du fait de la symétrie du pB.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{air \rightarrow bille}} \cdot \mathbf{\bar{y}} &= p_0 \cdot R^2 \iint \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \mathbf{\bar{u}}_r \cdot \mathbf{\bar{y}} = p_0 \cdot R^2 \iint \sin^2\theta \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ &= p_0 \cdot R^2 \int_0^\alpha \sin^2\theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0 \end{aligned}$$

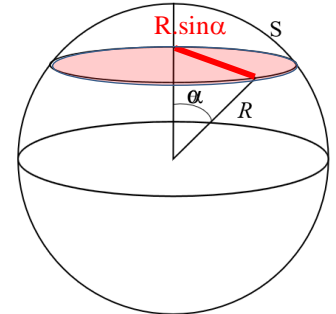
Interprétation : l'air ne produit pas de déplacement en translation suivant  $\mathbf{\bar{y}}$  du fait de la symétrie du pB.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{air \rightarrow bille}} \cdot \vec{z} &= p_0 \cdot R^2 \iint \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{z} = p_0 \cdot R^2 \iint \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ &= p_0 \cdot R^2 \int_0^\alpha \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = p_0 \cdot R^2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\alpha \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \\ &= p_0 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \left[ \frac{-\cos 2\theta}{2} \right]_0^\alpha = p_0 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) = p_0 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - 1 - 2\sin^2 \alpha) = p_0 \cdot \pi \cdot R^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Interprétation : l'air produit un déplacement en translation suivant  $\vec{z}$  vers le bas.

Donc  $\overrightarrow{R_{air \rightarrow bille}} \cdot \vec{z} \neq 0$ .

On retrouve force = pression \* surface où la surface est ici la surface dite projetée ou frontale :  $\pi \cdot R^2 \sin^2 \alpha$ . C'est un disque de rayon  $R \cdot \sin \alpha$ .



**Pour le moment du torseur:**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{(O, air \rightarrow bille)}} &= \iint \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}(M) \\ &= \iint \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_n(M) = \iint R \vec{u}_r \wedge p_0 \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \vec{u}_r = \vec{0} \end{aligned}$$

Les vecteurs dont on fait le produit vectoriel sont colinéaires.

Interprétation : l'air ne produit aucun déplacement en rotation autour de O du fait de la symétrie sphérique.

### Exercice 3 : barrage poids

Exercice sur le passage modèle local au modèle global avec pression normale variable.

Q1 : M : point de la surface de contact eau/barrage

z : altitude de ce point mesurée à partir du pied du barrage

h : hauteur d'eau mesurée à partir du pied du barrage

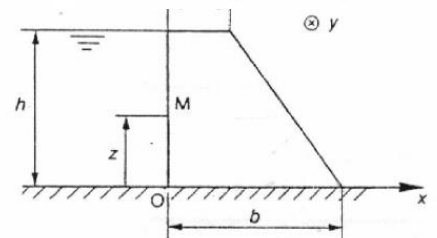
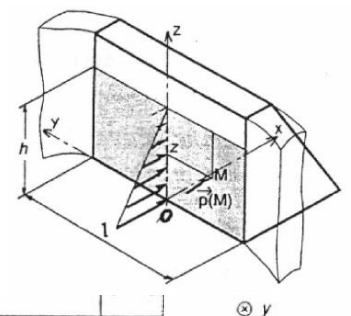
$\rho_e$  : masse volumique de l'eau

$p_{atm}$  : pression atmosphérique qui est celle à la surface libre du fluide

Par rapport au cours (chapitre 1.3.2.), l'altitude est mesurée par rapport au pied du barrage et non par rapport à la surface libre du fluide. Ce qui explique le modèle de pression :  $p(M) = \rho_e \cdot g \cdot (h - z) + p_{atm}$ .

A  $z = 0$ , l'écart de pression avec la pression atmosphérique vaut  $\rho_e \cdot g \cdot h$  (modèle « piscine » : la pression augmente de 1 bar tous les 10 m de profondeur).

A  $z = h$ , l'écart de pression avec la pression atmosphérique vaut 0.



Q2 : Attention. On est sur le modèle local (action mécanique élémentaire aussi). Le torseur est un glisseur. Celui de la petite force (uniquement normale puisque c'est une action hydrostatique) en M.

$$\left. \begin{cases} d\vec{F}_{(M)} = -p(M) \vec{n}(M) dS \\ d\vec{M}_{(M, d\vec{F}_{(M)})} = \vec{0} \end{cases} \right\} \text{avec } d\vec{F}_{(M)} = -p(M) \vec{n}(M) dS = (\rho_e \cdot g \cdot (h - z) + p_{atm}) dy \cdot dz \vec{x}$$

Et  $y \in [-1/2 ; 1/2]$ ,  $z \in [0 ; h]$  pour décrire la surface de contact eau/barrage

$$Q3 : \text{On applique Babar : } \left. \begin{array}{l} \vec{dF}_{(M)} = -p(M) \vec{n}(M) dS = (\rho_e \cdot g \cdot (h - z) + p_{atm}) \cdot dy \cdot dz \vec{x} \\ \vec{dM}_{(O, dF(M))} = \vec{OM} \wedge \vec{dF}_{(M)} = (y\vec{y} + z\vec{z}) \wedge (\rho_e \cdot g \cdot (h - z) + p_{atm}) \cdot dy \cdot dz \vec{x} \end{array} \right\}$$

$\vec{dF}_{(M)}$  est la petite force de pression (ou force élémentaire) en un point M de la surface de contact eau/barrage et  $\vec{dM}_{(O, dF(M))}$  est le petit moment (ou moment élémentaire) créé par cette force au point O (point de réduction du torseur).

Q4 : On intègre pour avoir le bilan (sous forme de torseur) de l'ensemble de toutes les petites forces qui s'appliquent sur la surface de contact eau/barrage.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} &= \rho_e \cdot g \cdot \int_{M \in S} (h - z) \cdot dy \cdot dz \vec{x} + p_{atm} \int_{M \in S} dy \cdot dz \\ &= \rho_e \cdot g \cdot \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_0^h (h - z) \cdot dz \vec{x} + p_{atm} \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_0^h dz \\ &= \rho_e \cdot g \cdot l \cdot \frac{h^2}{2} \vec{x} + p_{atm} \cdot l \cdot h \vec{x} \end{aligned}$$

homogénéité :  $\text{kg/m}^3 \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2 = \text{kg/s}^2 = \text{N}$  c'ets une force OK

$$Q5 : \|\vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}\| = 298 \cdot 10^9 + 213180 \text{ N} \approx 298 \cdot 10^9 \text{ N} . \text{CDC OK}$$

On remarque que la force globale de pression sur le barrage due à la pression atmosphérique est négligeable. En général, on ne la prend pas en compte puisque cette force de pression se retrouve également « de l'autre côté du barrage ». Elles se compensent. Ne reste alors que la force de pression due à l'eau.

Q6 : Le centre de poussée est le point s'il existe où le torseur global de l'action mécanique peut s'écrire sous la forme d'un glisseur (moment nul en P). Dans l'exercice du cours sur le frein de TGV, on montre que ce point n'existe pas.

On commence par calculer le moment global au point O :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{(O, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} &= \rho_e \cdot g \cdot \int_{M \in S} (y\vec{y} + z\vec{z}) \wedge (h - z) \cdot dy \cdot dz \vec{x} \\ &= \rho_e \cdot g \cdot \int_{M \in S} (y(-h + z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{z} + z(h - z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{y}) = \rho_e \cdot g \cdot \frac{h^3}{6} \cdot l \vec{y} \end{aligned}$$

homogénéité :  $\text{kg/m}^3 \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}^3 \cdot \text{m} = \text{m} \cdot \text{kg/s}^2 = \text{N} \cdot \text{m}$  c'est un moment OK

On applique Babar en cherchant P (dans le plan de contact donc de coordonnées  $y_P$  et  $z_P$  tel que

$$\vec{M}_{(P, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0}$$

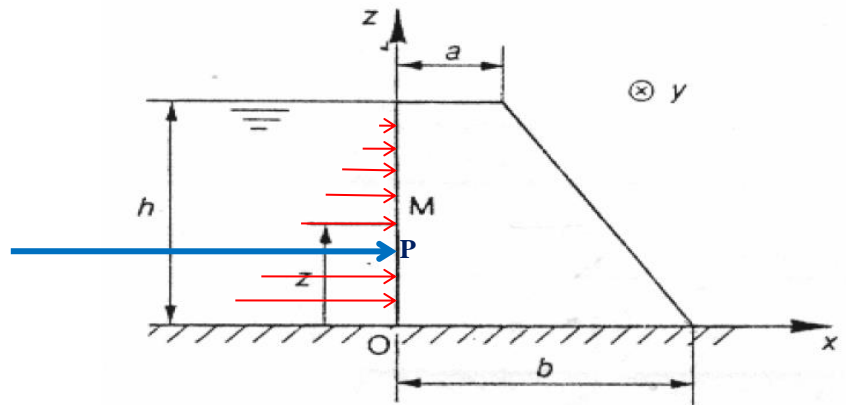
$$\vec{M}_{(P, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{M}_{(O, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} + \vec{PO} \wedge \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{OP} \wedge \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \vec{M}_{(O, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})}$$

$$\text{Ce qui donne } \begin{vmatrix} 0 \\ y_P \wedge \\ z_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \rho_e \cdot g \cdot l \cdot \frac{h^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho_e \cdot g \cdot \frac{h^3}{6} \cdot l \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{d'où : } z_P \cdot \rho_e \cdot g \cdot l \cdot \frac{h^2}{2} = \rho_e \cdot g \cdot \frac{h^3}{6} \cdot l \Rightarrow z_P = \frac{h}{3} \text{ et } y_P = 0$$

$$\text{Ce qui donne : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \rho_e \cdot g \cdot l \cdot \frac{h^2}{2} \vec{x} \\ \vec{M}_{(P, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Il s'agit bien d'un glisseur en P (moment nul) dont la résultante (qui est un invariant du torseur) est celle calculée en Q4.

Q7 : Sur le schéma, **En rouge**, le modèle local, les forces de pression élémentaires  
**En Bleu**, le modèle global, la force totale de pression de l'eau sur le barrage.



Q8 : On utilise la figure ci-dessus. Barrage vu dans la direction y  
La masse volumique est constante (béton homogène) donc le poids est le volume\* masse volumique avec le volume V qui est celui d'un cylindre (longueur l) à section trapézoïdale (surface :  $(ah + (1/2)(b-a)h)$ )

$$\text{Poids} = \rho_B \cdot g \cdot V = \rho_B \cdot g \cdot l \cdot (ah + (1/2)(b-a)h) = 562 \cdot 10^9 \text{ N} \quad (\text{attention } \rho_B = 2560 \text{ kg/m}^3)$$

Q9 : On modélise les actions de pesanteur sur le barrage sous la forme d'un glisseur au centre de gravité

$$\text{cherché G : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{pes} \rightarrow \text{barrage}} = -\rho_B \cdot g \cdot l \cdot h \cdot \frac{b+a}{2} \vec{z} \\ \vec{M}_{(G, \text{pes} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{La résultante est le poids précédemment calculé.}$$

Position de G : par symétrie  $G(x_G, 0, z_G)$       G est dans le plan de symétrie du barrage (xOz)

méthode barycentrique (puisque la section (figure ci-dessus) est l'association d'un rectangle (longueur h, largeur a) et d'un triangle rectangle (hauteur h, base (b-a)) :

décomposition du trapèze : solide1 : rectangle et solide2 : triangle.

$$\text{Formule du barycentre : } (m_1 + m_2) \vec{OG} = m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2$$

En notant  $\sigma$  la masse surfacique (masse d'une tranche de 1m) du barrage

Avec :  $G_1 (7.5, 0, 142.5)$  et  $m_1 = 15 \cdot 285 \cdot \sigma$  et  $G_2 (75, 0, 95)$  et  $m_2 = 180 \cdot 285 \cdot \sigma \cdot 0.5$

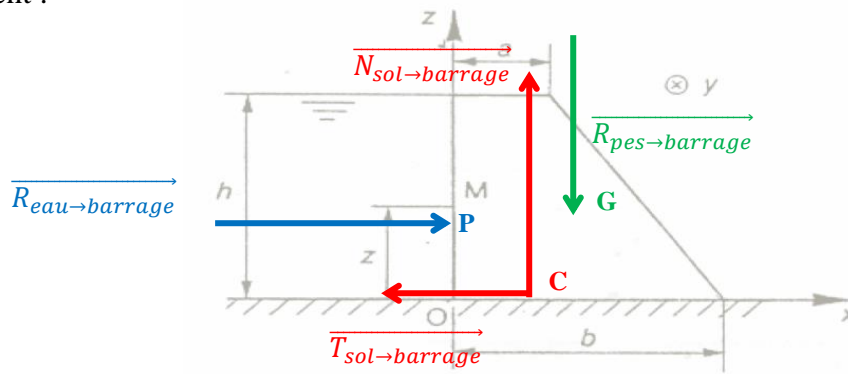
D'où G (65.3, 0, 101.8)      résultat Ok puisque le centre de gravité est du côté où il y a le plus de matière

Q10 : Même si le cours ne présente le théorème de la résultante statique (TRS) qu'au chapitre 3, la deuxième loi de Newton ( $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = \vec{0}$ ) est connue. On fait un bilan des forces extérieures qui s'appliquent sur le barrage qui est au repos (accélération  $\vec{a}$  nulle).

S'exercent sur le barrage :

- l'action de l'eau :  $\overrightarrow{R_{eau \rightarrow barrage}}$
- l'action de la pesanteur :  $\overrightarrow{R_{pes \rightarrow barrage}}$
- l'action du sol avec frottement :  $\overrightarrow{R_{sol \rightarrow barrage}} = \overrightarrow{N_{sol \rightarrow barrage}} + \overrightarrow{T_{sol \rightarrow barrage}}$
- on modélise par un glisseur dont ne connaît pas le point d'application (noté C, centre de poussée qui est un point de l'axe central (cours ODM)). Cette force se décompose en une force normale (suivant z) et une force tangentielle, qui appartient au plan tangent (xOy) et qui s'oppose à la vitesse de glissement donc suivant x. Si le barrage glisse il translate suivant  $x^+$ .

Graphiquement :



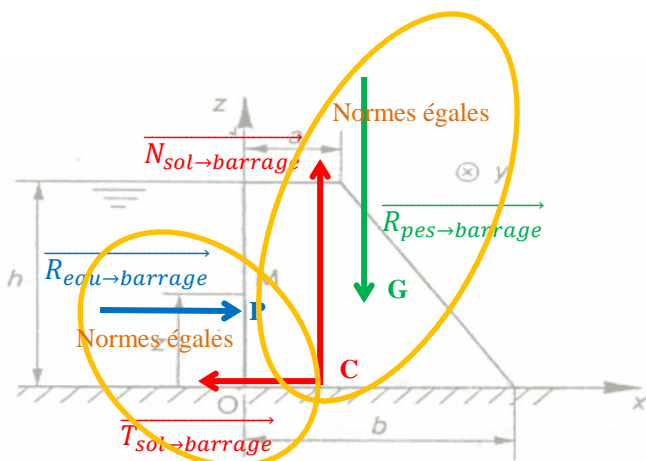
On applique ( $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ) en procédant par direction ce qui revient à projeter suivant  $\vec{x}$  puis suivant  $\vec{z}$  :

$$\overrightarrow{T_{sol \rightarrow barrage}} = -\overrightarrow{R_{eau \rightarrow barrage}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N_{sol \rightarrow barrage}} = -\overrightarrow{R_{pes \rightarrow barrage}}$$

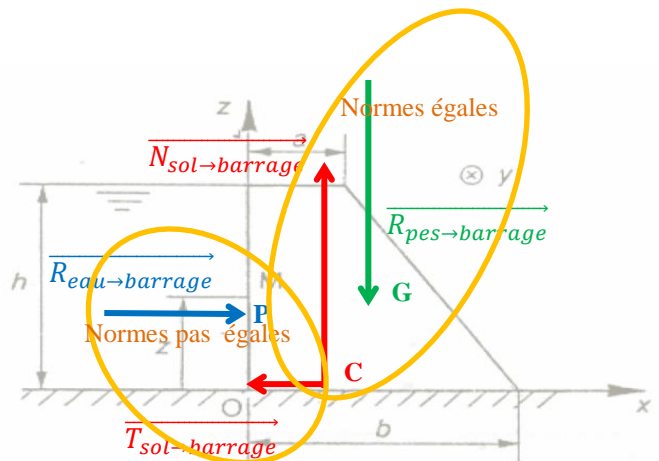
Si le barrage glisse  $\|\overrightarrow{T_{sol \rightarrow barrage}}\| = \|\overrightarrow{N_{sol \rightarrow barrage}}\| \cdot f$  (loi de Coulomb lorsqu'on est à la limite du glissement)

Pour que le barrage ne glisse pas il faut un coeff de frottement mini de  $\frac{\|\overrightarrow{T_{sol \rightarrow barrage}}\|}{\|\overrightarrow{N_{sol \rightarrow barrage}}\|} = 0.53$

Graphiquement en respectant à peu près les ordres de grandeur des forces, lorsqu'on est à l'équilibre limite (début de glissement du barrage)



A l'équilibre limite



Déséquilibre si coeff de frottement trop faible :

$$\mathbf{T_{sol \rightarrow barrage} < N_{sol \rightarrow barrage} \cdot f}$$

Q11 : On peut implanter le barrage sur des sols de type : GW, GP, SW, Roche et cailloux.

**Exercice 4 : effet Magnus**

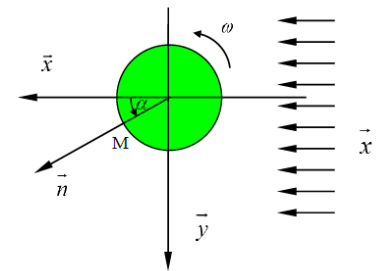
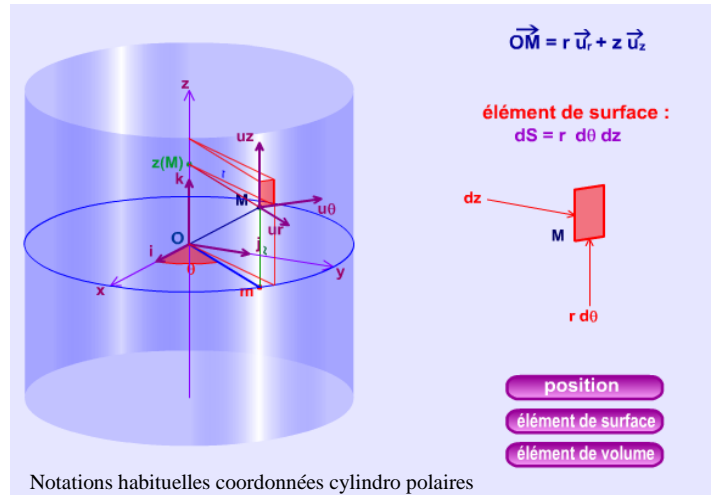
L'étude menée ici n'est pas un problème d'action hydrostatique dans le sens où l'air qui génère des actions mécaniques sur chacun des mâts cylindriques du navire est en mouvement. En se plaçant dans un écoulement laminaire (voir cours méca des fluides en physique) on retrouve les hypothèses d'une étude statique. On ne tient toujours pas compte des frottements de l'air sur la surface cylindrique de chaque mât. La pression normale (expression fournie dans l'énoncé et obtenue après expérimentation) n'est pas constante. Sur une section (altitude z fixée) elle dépend de la position angulaire (paramétrée par l'angle  $\alpha$  ici) du point M considéré.

Q1- Modélisation locale :

Force élémentaire ou « petite force » :

$$\overrightarrow{dF}(M) = -\overline{\rho}(M).dS = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega R}{V_0} - 2 \sin \alpha \right)^2 \right] dS \vec{n}$$

- Le  $\alpha$  de l'énoncé correspond au  $\theta$  habituellement utilisé (figure ci-contre).
- Le rayon R des mâts du navire est le rayon r de la figure ci-contre.
- $\vec{n}(M)$  est la normale orientée vers l'extérieur du solide isolé (le mât).  $\vec{u}_r$  sur la figure ci-contre.
- L'élément de surface  $dS = r.d\theta.dz$  de la figure ci-contre devient  $dS = R.d\alpha.dz$  avec  $\alpha \in [0; 2\pi]$ ,  $z \in [0; L]$  pour décrire l'ensemble de la surface de contact air/mât



Moment élémentaire ou « petit moment » :

$$\overrightarrow{dm}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF}(M) = \vec{0} \quad \text{puisque les deux vecteurs sont portés par } \vec{u}_r = \vec{n}(M)$$

Modélisation globale : par intégration sur la surface cylindrique extérieur d'un mât, on obtient :

$$\overrightarrow{F}(\text{vent} \rightarrow \text{navire}) = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{1}{2} \rho V_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega R}{V_0} - 2 \sin \alpha \right)^2 \right] R d\alpha dz \vec{n} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{m}_O(\text{vent} \rightarrow \text{navire}) = \vec{0}$$

Il y a 2 mâts

On ne peut pas intégrer tout de suite : la normale  $\vec{n}(M) = \vec{n}$  dépend de l'angle  $\alpha$ . Il faut donc projeter sur la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  pour faire apparaître cette dépendance et ensuite intégrer.

On a :  $\vec{n}(M) = \vec{n} = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$

$$\bullet \quad \overrightarrow{F} \cdot \vec{x} = -\rho V_0^2 R \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[ 1 - \left( \frac{\omega R}{V_0} - 2 \sin \alpha \right)^2 \right] \cdot \cos \alpha \, d\alpha \, dz = -\rho V_0^2 R L \left[ \sin \alpha + \frac{1}{6} \left( \frac{\omega R}{V_0} - 2 \sin \alpha \right)^3 \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{F} \cdot \vec{y} &= -\rho V_0^2 R \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[ 1 - \left( \frac{\omega R}{V_0} - 2 \sin \alpha \right)^2 \right] \cdot \sin \alpha \, d\alpha \, dz \\
 &= -\rho V_0^2 R L \int_0^{2\pi} \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2 R^2}{V_0^2} \right) \sin \alpha + \frac{4\omega R}{V_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} \right) - 4(1 - \cos^2 \alpha) \sin \alpha \right] d\alpha \\
 &= -\rho V_0^2 R L \int_0^{2\pi} \frac{2\omega R}{V_0} d\alpha \\
 &= -\rho \cdot V_0 \cdot R^2 \cdot L \cdot \omega \cdot 4\pi
 \end{aligned}$$

On retrouve le résultat de l'énoncé

Q2 - Application numérique :

$$\vec{F} \cdot \vec{y} = -\rho \cdot V_0 \cdot R^2 \cdot L \cdot \omega \cdot 4\pi = -4\pi \cdot 1,225 \cdot \frac{40000}{3600} \cdot \frac{200 \cdot 2\pi}{60} \cdot 1^2 \cdot 8 = -28700 \text{ N}$$

Remarques : Le système de propulsion étudié présente de nombreux avantages même s'il ne s'est pas beaucoup développé sur les navires. Sans permettre la propulsion complète d'un navire, il est complémentaire d'une propulsion à hélice motorisée. Il contribue à la réduction de la consommation des bateaux à moteur puisque la mise en rotation à vitesse constante  $\omega$  des mâts consomme peu d'énergie. Ceux-ci sont montés en liaison pivot avec roulements à billes sur la coque du bateau. Une fois atteint le régime permanent, le maintien de la vitesse constante  $\omega$  se fait avec une dépense énergétique faible. La puissance mécanique s'écrit  $C \cdot \omega$  avec le  $C$  le couple fourni aux mâts pour les faire tourner qui est très faible puisqu'il n'y a que très peu de frottement et de résistance à vaincre.

Les inconvénients sont malheureusement assez importants. La force propulsive dépend de la vitesse du vent  $V_0$  comme pour une embarcation à voile. Si on calcule la surface projetée (voir exo 2)  $S_{\text{projetée}} = 2 \cdot 2 \cdot R \cdot L = 32 \text{ m}^2$ . Cette surface non réductible (au contraire de ce qui se passe sur un bateau à voile) pose problème lors d'une navigation par grand vent. Enfin, le navire est contraint de naviguer perpendiculairement à la direction du vent. Dans le cas d'un vent de face par exemple, le système offre une résistance à l'avancement.



## Exercice 5 : Traction/torsion

On étudie ici une machine d'essai traction/torsion pour caractériser un matériau.

On étudie dans un premier temps le vérin linéaire. Le principe de fonctionnement est simple. On introduit de l'huile (son incompressibilité permet de générer des pressions importantes) dans les 2 chambres cylindriques situées de part et d'autre de l'ensemble piston + tige. Les actions hydrostatiques générées permettent de « tirer » (ici vers le bas) la tige sur laquelle est fixée l'éprouvette de test. D'où le nom essai de traction.

Q1 : Les actions élémentaires (uniquement normales à la surface de contact) s'exerçant sur la partie cylindrique s'annulent (dessinées en **bleu**). Pour s'en convaincre il suffit de considérer les petites forces (forces élémentaires) en un point M et en son symétrique M' par rapport à l'axe du vérin. Normes et direction des petites forces sont identiques. Leur sens sont opposés.

Q2 : Les actions élémentaires s'exerçant sur la partie plane du piston « s'ajoutent » pour générer un effort de traction (dessinées en **rouge**). Modèle de pression constante donc inutile de faire un calcul d'intégrale pour le passage au modèle global. On ne demande par le torseur complet mais juste la résultante. On ressort le résultat simple force = pression \* surface

La résultante de l'action de l'huile chambre 1 sur le piston vaut donc :

$\vec{R}_{huile\ ch1 \rightarrow 2} = -P_H \cdot \pi \cdot \frac{(D^2 - d^2)}{4} \vec{z}_0$  Attention la surface de contact huile/surface plane du piston est un disque de diamètre D sans le centre...

Q3 : On refait le même calcul pour la résultante de l'action de l'huile chambre 2 :

$$\vec{R}_{huile\ ch2 \rightarrow 1} = P_B \cdot \pi \cdot \frac{(D^2 - d^2)}{4} \vec{z}_0$$

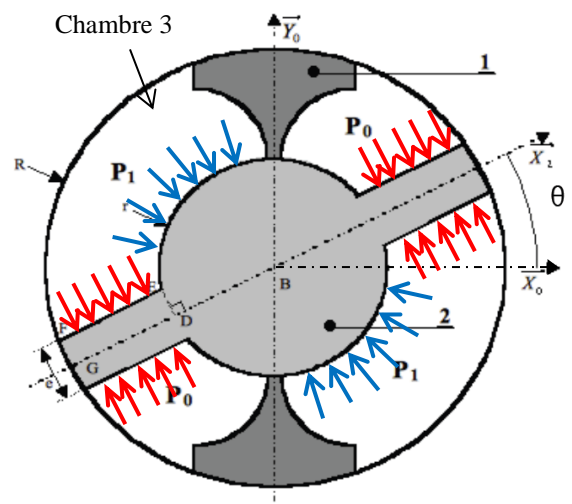
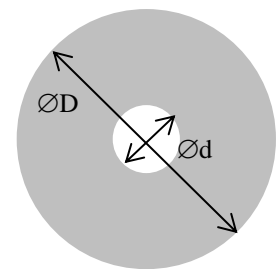
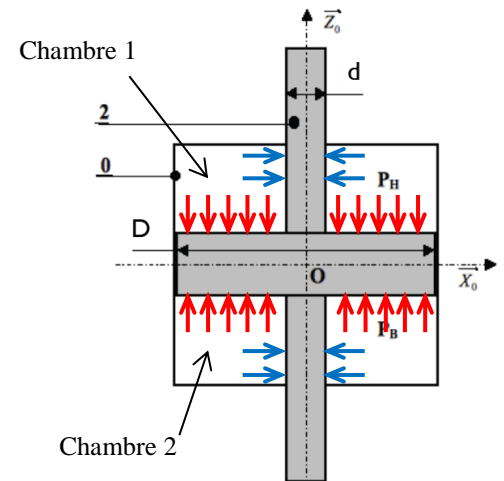
L'action mécanique globale due à l'action des fluides est la somme des deux résultantes précédentes :

$$\vec{Fz} = (P_B - P_H) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) \vec{z}_0$$

Q4 :  $Fz = (220-1) \cdot (\pi/4) \cdot (25-9) = 2752 \text{ daN} = 27.5 \text{ kN} \Rightarrow$  Cahier des charges OK

On étudie dans un deuxième temps le vérin rotatif. Le principe de fonctionnement est simple. On introduit de l'huile dans les 4 chambres situées de part et d'autre du solide 2. Les actions hydrostatiques générées permettent de « tourner » (ici dans le sens trigo puisque  $P_1 > P_0$ ) le solide 2 sur lequel est fixée l'éprouvette de test. D'où le nom essai de torsion.

Q5 : Les actions élémentaires s'exerçant sur la partie cylindrique s'annulent (en **bleu**) pour les mêmes raisons qu'à la question 1.



Q6 : On s'intéresse à l'action de l'huile dans la chambre 3. Les petites forces (forces élémentaires en rouge) s'appliquent sur une surface plane rectangulaire de hauteur  $H$  et de largeur  $(R - r)$ . L'ensemble de ces forces élémentaires génère une force résultante perpendiculaire à la surface. C'est un glisseur dont le point de réduction (définissant l'axe central et appelé aussi centre de poussée (exo 3) est le CDG de la surface (intersection des diagonales). La norme de cette force résultante vaut  $P_1 \cdot H \cdot (R - r)$  (modèle simple force = pression \* surface). Inutile encore de faire des calculs d'intégrales ici.

Cette force (en vert) s'applique à une distance  $\frac{R+r}{2}$  du centre de rotation  $B$  du solide 2. C'est le bras de levier.

L'action qui nous intéresse générée par l'ensemble des forces élémentaires sur la face plane est donc un moment suivant  $\vec{z}_0$  qui vaut (moment = force \* bras de levier) :

$$\vec{M}_{(B, \text{huile ch3} \rightarrow 2)} \cdot \vec{z}_0 = \frac{R+r}{2} \cdot P_1 \cdot H \cdot (R-r)$$

Q7 : On refait la même étude pour la deuxième chambre alimentée en pression  $P_1$  et les deux chambres alimentées en pression  $P_0$ . Attention au sens des moments.

On remarquera que la somme des résultantes sur chacune des faces planes s'annule. Le torseur des actions mécaniques de l'huile (pression  $P_1$  et  $P_0$ ) donc un torseur couple au global. Son moment est  $\vec{M}_{(B, \text{fluides} \rightarrow 2)} = C_v \cdot \vec{z}_0$  (représenté par un vecteur tournant en vert)

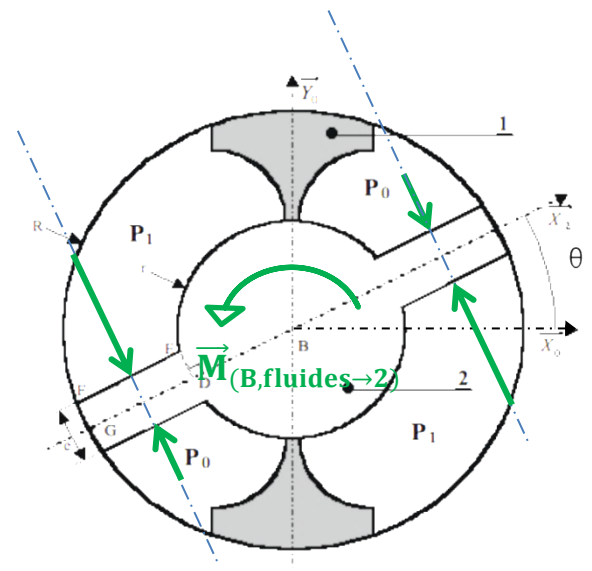
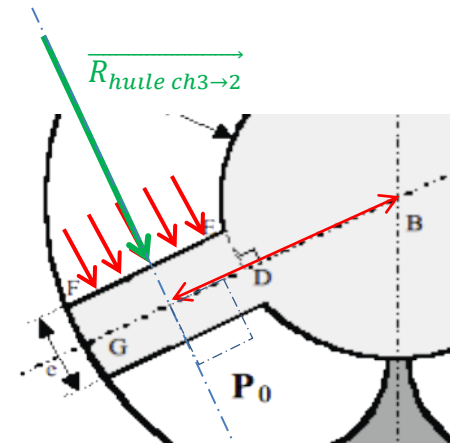
$$\text{avec } C_v = 2 * \frac{R+r}{2} \cdot P_1 \cdot H \cdot (R-r) - 2 * \frac{R+r}{2} \cdot P_0 \cdot H \cdot (R-r)$$

$$\text{D'où } C_v = (P_1 - P_0) H \cdot (R^2 - r^2)$$

Q8 :  $C_v = 1330.6 \text{ daN.cm} = 1.33 \text{ kN.m} \Rightarrow$  Cahier des charges OK

Bilan : L'association en série des deux vérins, linéaire et rotatif, permet donc de solliciter l'éprouvette d'essai avec une force de traction et un couple de torsion.

On remarquera qu'il n'est absolument pas nécessaire de faire des calculs d'intégrales.



## Exercice 6 : porte de garage

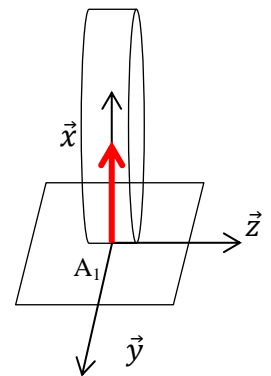
L'objectif de cet exercice est d'établir l'équation faisant intervenir les efforts du système de compensation de poids. La porte de garage d'un poids conséquent est difficilement manœuvrable sans un système de compensation des actions de pesanteur (2 systèmes étudiés ici : à contrepoids et à ressort). C'est le premier exercice pour vous nécessitant l'emploi des torseurs d'action mécanique associés aux liaisons normalisées.

Q1 :

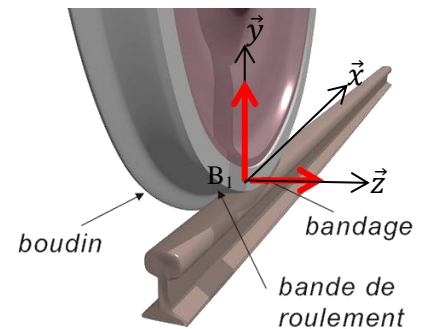
Il peut être intéressant de faire un graphe des liaisons sur lequel on ajoute les actions mécaniques extérieures (autres que les actions de liaisons). Les galets sont des petites roulettes forcément montées en liaisons pivot (supposée sans frottement) sur la porte 2. Pas de précision sur les centres de ces liaisons. Les liaisons galets/rainures (rails de guidage) sont précisées dans l'énoncé.

Petite interprétation sur les contacts galet/rail de guidage sans frottement :

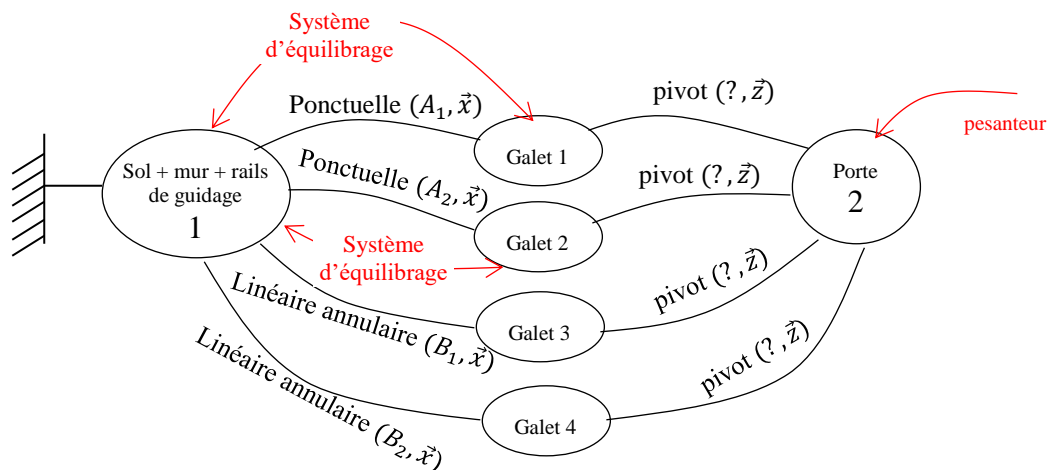
En  $A_1$  et  $A_2$  : liaisons ponctuelles normale  $\vec{x}$   $\Rightarrow$  contact ponctuelle d'un disque d'épaisseur faible sur un plan  $\Rightarrow$  l'effort est une force (donc un glisseur) suivant la normale en rouge



En  $B_1$  et  $B_2$  : liaisons linéaires annulaires axe  $\vec{x}$   $\Rightarrow$  comparable au contact roue/rail d'un train  $\Rightarrow$  l'effort est une force (donc un glisseur) avec 2 composantes en rouge



Graphe des liaisons avec actions mécaniques :

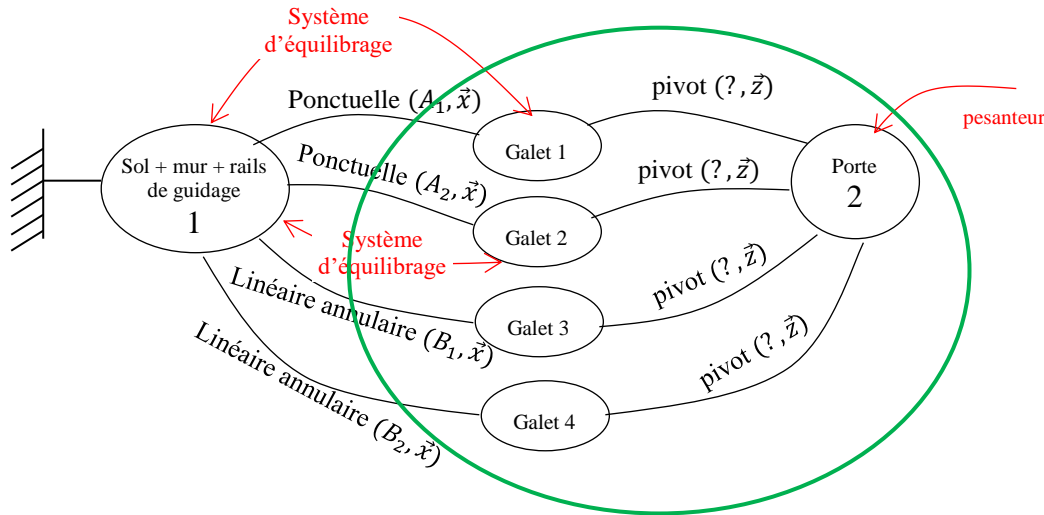


On ne tient compte que de la pesanteur sur la porte (masses des galets négligeables)

L'application du principe Fondamental de la Statique (ou Principe Fondamental de la dynamique lorsque rien ne bouge ou 2<sup>ème</sup> loi de Newton) nécessite de faire le **Bilan des Actions Mécaniques Extérieures** (sous forme torsielle en SI) à un solide ou à un ensemble de solides.

L'énoncé propose d'isoler la porte 2 avec ses galets. Si on isole uniquement la porte 2 sans les galets, les liaisons pivots galets/porte seront des actions mécaniques extérieures (5 composantes à déterminer dans les torseurs d'action mécanique associés à ces liaisons pivots (puisque chaque liaison a 1 degré de liberté)). Cela conduirait à un problème dans lequel on retrouve 20 inconnues de liaison !!!! d'où l'isolement proposé : porte + galets.

Faisons le bilan des actions mécaniques extérieures (**BAME**) sur le système isolé : porte2 + galets = E  
La frontière d'isolement en représentée en vert.



On a 7 torseurs d'action mécanique à modéliser et à exprimer dans la base  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  :

·  $T_{pesanteur \rightarrow E} = \left\{ \overrightarrow{R_{pes \rightarrow E}} \quad \overrightarrow{M_{(G, pes \rightarrow E)}} \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_G$  c'est un glisseur en G (centre de gravité de la porte). Le poids en vertical descendant. On ne tient compte que du poids de 2.

·  $T_{syst \text{ équilibrage} \rightarrow E} = \left\{ \overrightarrow{R_{eq \rightarrow E}^1} \quad \overrightarrow{M_{(A_1, eq \rightarrow E)}^1} \right\}_{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_1}$  force donc glisseur en  $A_1$  du système d'équilibrage (ressort ou contrepoids).

·  $T_{syst \text{ équilibrage} \rightarrow E} = \left\{ \overrightarrow{R_{eq \rightarrow E}^2} \quad \overrightarrow{M_{(A_2, eq \rightarrow E)}^2} \right\}_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_2}$  force donc glisseur en  $A_2$  du système d'équilibrage (ressort ou contrepoids).

·  $T_{1 \rightarrow E}^1 = \left\{ \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^1} \quad \overrightarrow{M_{(A_1, 1 \rightarrow E)}^1} \right\}_{A_1} = \begin{pmatrix} X_{1E}^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_1} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_1}$  force donc glisseur en  $A_1$  de direction la normale ( $\vec{x}$ ) à cause du modèle de liaison : ponctuelle sans frottement de normale ( $A_1, \vec{x}$ ). Cette force ( $X_{1E}$ ) est inconnue (c'est le PFS qui la déterminera). C'est une force de 1 sur E d'où son écriture  $X_{1E}$

·  $T_{1 \rightarrow E}^2 = \left\{ \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^2} \quad \overrightarrow{M_{(A_2, 1 \rightarrow E)}^2} \right\}_{A_2} = \begin{pmatrix} X_{1E}^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_2} = \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A_2}$  idem. Le 2 de  $X_{1E}^2$  n'est pas une puissance mais un indice pour différencier les 2 forces  $X_{1E}^1$  et  $X_{1E}^2$ . Par souci de simplification on les rebaptise  $X_1$  et  $X_2$ .

$$\cdot T_{1 \rightarrow E}^3 = \left\{ \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^3} \quad \overrightarrow{M_{(B_1, 1 \rightarrow E)}^3} \right\}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1E}^3 & 0 \\ Z_{1E}^3 & 0 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{pmatrix}_{B_1} \quad \text{force suivant } (\vec{y}) \text{ et } (\vec{z}) \text{ à cause du}$$

modèle de liaison (voir plus haut). On simplifie si possible les notations ( $Y_1 = Y_{1E}^3$ ).

$$\cdot T_{1 \rightarrow E}^4 = \left\{ \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^4} \quad \overrightarrow{M_{(B_2, 1 \rightarrow E)}^4} \right\}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1E}^4 & 0 \\ Z_{1E}^4 & 0 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{pmatrix}_{B_2} \quad \text{force suivant } (\vec{y}) \text{ et } (\vec{z}) \text{ à cause du}$$

modèle de liaison. On simplifie si possible les notations ( $Y_2 = Y_{1E}^4$ ).

Bilan : 6 inconnues de liaisons ( $X_1, X_2, Y_1, Z_1, Y_2, Z_2$ ) qui sont uniquement des forces (les liaisons modélisées ne transmettent pas de moment puisqu'elles ont toutes les 3 degrés de liberté en rotation) mais toutes différentes. Le PFS (Newton) va nous indiquer comment les efforts extérieurs (P et Fr) se « distribuent » dans chaque liaison...

Q2 : on n'a plus qu'à appliquer le Principe fondamentale de la statique sous forme torsorielle. On fait la somme (il faudra réduire les torseurs en un même point) et on dit que la somme des résultantes est nulle (ce qui signifie que l'ensemble des forces qui s'appliquent sur E ne provoque pas de mouvement de translation) et que la somme des moments est nulle (ce qui signifie que l'ensemble des moments qui s'appliquent sur E ne provoque pas de mouvement de rotation).

On commence par le Théorème de la résultante statique ( $\sum \overrightarrow{F_{ext \text{ à } E \rightarrow E}} = \vec{0}$ )

$$\vec{R}(\vec{E} \rightarrow \vec{E}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{R_{pes \rightarrow E}} + \overrightarrow{R_{eq \rightarrow E}^1} + \overrightarrow{R_{eq \rightarrow E}^2} + \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^1} + \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^2} + \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^3} + \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^4} = \vec{0}$$

$$\text{Soit : } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & X_1 & X_2 & 0 & 0 \\ -P & F_r & F_r & 0 & 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{ce qui donne en projetant respectivement sur } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} :$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 & (1) \\ -P + 2F_r + Y_1 + Y_2 = 0 & (2) \\ Z_1 + Z_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

On ne peut pas résoudre c'est-à-dire trouver une équation entre P, Fr et  $\alpha$ . Interviennent forcément les inconnues de liaisons ( $X_1, X_2, Y_1, Z_1, Y_2, Z_2$ ). Il faut donc continuer à écrire le PFS en moment.

Théorème du moment statique ( $\sum \overrightarrow{M_{O, ext \text{ à } E \rightarrow E}} = \vec{0}$ ). Il faut choisir un point de réduction des torseurs donc un point d'expression des moments. On verra que plusieurs critères permettent de faire un choix intelligent. Ici on choisit un point du plan de symétrie de la géométrie qui est aussi un plan de symétrie des efforts extérieurs. Le plan ( $A, \vec{x}, \vec{y}$ ). Le choix du point influence le système d'équations obtenu mais pas la résolution !!

Prenons le point A.

$$\vec{M}_A(\vec{E} \rightarrow \vec{E}) = \vec{0} \Rightarrow$$

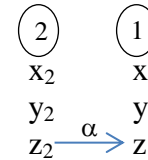
$$\overrightarrow{M_{(A, pes \rightarrow E)}} + \overrightarrow{M_{(A, eq \rightarrow E)}^1} + \overrightarrow{M_{(A, eq \rightarrow E)}^2} + \overrightarrow{M_{(A, 1 \rightarrow E)}^1} + \overrightarrow{M_{(A, 1 \rightarrow E)}^2} + \overrightarrow{M_{(A, 1 \rightarrow E)}^3} + \overrightarrow{M_{(A, 1 \rightarrow E)}^4} = \vec{0}$$

Il faut utiliser Babar pour changer de point les moments de torseurs :

$$\overrightarrow{M_{(G, pes \rightarrow E)}} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_{pes \rightarrow E}} + \overrightarrow{M_{(A_1, eq \rightarrow E)}^1} + \overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{R_{eq \rightarrow E}^1} + \overrightarrow{M_{(A_2, eq \rightarrow E)}^2} + \overrightarrow{AA_2} \wedge \overrightarrow{R_{eq \rightarrow E}^2} + \overrightarrow{M_{(A_1, 1 \rightarrow E)}^1} + \overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^1} + \overrightarrow{M_{(A_2, 1 \rightarrow E)}^2} + \overrightarrow{AA_2} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^2} + \overrightarrow{M_{(B_1, 1 \rightarrow E)}^3} + \overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^3} + \overrightarrow{M_{(B_2, 1 \rightarrow E)}^4} + \overrightarrow{AB_2} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}^4} = \vec{0}$$

Il faut exprimer  $\overrightarrow{AG}$  dans la base  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  :

$$\overrightarrow{AG} = a\vec{x}_2 + \frac{h}{2}\vec{y}_2 = \left( a\cos\alpha + \frac{h}{2}\sin\alpha \right) \vec{x} + \left( \frac{h}{2}\cos\alpha - a\sin\alpha \right) \vec{y}$$



Il faut aussi exprimer  $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \frac{b}{2}\vec{z} + h\vec{y}_2 = h\sin\alpha\vec{x} + h\cos\alpha\vec{y} + \frac{b}{2}\vec{z}$

D'où :

$$\begin{pmatrix} a\cos\alpha + \frac{h}{2}\sin\alpha \\ \frac{h}{2}\cos\alpha - a\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F_r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F_r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h\sin\alpha \\ h\cos\alpha \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h\sin\alpha \\ h\cos\alpha \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne en projection respectivement sur  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{b}{2} \cdot F_r + \frac{b}{2} \cdot F_r + Z_1 \cdot h\cos\alpha - \frac{b}{2} \cdot Y_1 + Z_2 \cdot h\cos\alpha + \frac{b}{2} \cdot Y_2 &= 0 \Rightarrow h\cos\alpha(Z_1 + Z_2) + \frac{b}{2}(Y_2 - Y_1) = 0 \quad (4) \\ \frac{b}{2}X_1 - \frac{b}{2}X_2 - Z_1 \cdot h\sin\alpha - Z_2 \cdot h\sin\alpha &= 0 \Rightarrow h\sin\alpha(Z_1 + Z_2) + \frac{b}{2}(X_2 - X_1) = 0 \quad (5) \\ -\left( a\cos\alpha + \frac{h}{2}\sin\alpha \right) P + Y_1 \cdot h\sin\alpha + Y_2 \cdot h\sin\alpha &= 0 \Rightarrow -\left( a\cos\alpha + \frac{h}{2}\sin\alpha \right) P + h\sin\alpha(Y_2 + Y_1) = 0 \quad (6) \end{aligned} \right\}$$

Résolution : pour obtenir l'équation reliant P, Fr et  $\alpha$ , il faut combiner les équations (2) et (6).

Cela donne :

$$(2) \Rightarrow Y_1 + Y_2 = P - 2F_r$$

$$\text{Dans (6) : } \left( a\cos\alpha + \frac{h}{2}\sin\alpha \right) P = h\sin\alpha(P - 2F_r) = P \cdot h\sin\alpha - 2F_r \cdot h\sin\alpha \Rightarrow P \cdot a\cos\alpha = h\sin\alpha \left( \frac{P}{2} - 2F_r \right)$$

$$\text{d'où : } \tan\alpha = \frac{a \cdot P}{h \left( \frac{P}{2} - 2F_r \right)} = \frac{2a \cdot P}{h(P - 4F_r)} \quad (\text{homogène puisque sans dimension})$$

**Bilan :** on commence par le TRS, c'est vite écrit et on donne directement les équations scalaires (1, 2 et 3).

On se rend compte que cela ne suffit pas pour répondre à la question donc on écrit le TMS en un point à choisir.

On l'écrit vectoriellement parlant puis on donne les équations scalaires (4, 5 et 6). Après on résout.

**Remarque :** ce qui est écrit en rouge n'est pas à écrire sur la copie. Il faut aller vite !!!

$$\text{Q3 : système d'équilibrage avec contrepoids : } F_r = F/2 \quad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2a \cdot P}{h(P - 2F)}$$

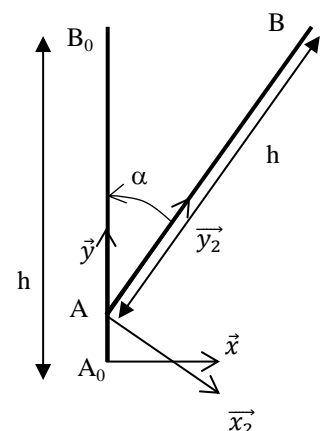
$$\text{Q4 : système d'équilibrage avec ressorts : } F_r = F_0 - kA_0A$$

· Lorsque la porte est verticale :  $\alpha = 0$  et A confondu avec  $A_0$ .

$$\text{On a : } F_r(\alpha = 0) = F_0 - kA_0A_0 = F_0$$

· Pour  $\alpha \neq 0$  :  $F_r(\alpha) = F_0 - kA_0A = F_0 - k(A_0B_0 - B_0A)$   
 $= F_0 - k(h - h\cos\alpha)$

K est la raideur d'un ressort en N/m



$$\text{D'où : } P \cdot a\cos\alpha = \frac{P}{2} h\sin\alpha - h\sin\alpha 2F_r = \frac{P}{2} h\sin\alpha - 2h\sin\alpha F_0 - 2h^2 \sin\alpha k(1 - \cos\alpha)$$

$$P \cdot a\cos\alpha = h\sin\alpha \left( \frac{P}{2} - 2F_0 - 2hk(1 - \cos\alpha) \right)$$

## Exercice 7 : machine d'essai de frottement

Cette machine va permettre de connaître le coefficient de frottement entre les deux solides 2 et 0. Celui-ci ne pouvant être obtenu qu'expérimentalement.

Remarques : à la lecture de l'énoncé que l'hypothèse problème plan est adoptée (cohérent avec la représentation plane du mécanisme). Conséquences sur la modélisation :

- Les liaisons du câble 3 sur 2 et sur 4 peuvent être modélisées par des rotules. Elles ne transmettent aucun moment puisque le câble est déformable. Leurs torseurs d'A.M. sont de la forme :  $\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{C \text{ ou } D}$ .
- Avec l'hypothèse **Pb plan** on ne tient compte que des composantes de résultante dans le plan et de la composante de moment perpendiculaire au plan. D'où la forme :  $\begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{C \text{ ou } D}$ . On a donc un glisseur (une force centrale en physique).
- Les actions de pesanteur sont modélisables par des glisseurs :  $\begin{Bmatrix} 0 & - \\ -m_i \cdot g & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{CDG_i, B_0}$ .
- Les liaisons pivot sont de la forme :  $\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{A \text{ ou } O}$ . Avec l'hypothèse **Pb plan** :  $\begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{A \text{ ou } O}$ . Ceux sont donc des glisseurs.
- Enfin la liaison ponctuelle est de la forme :  $\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$ . X est la composante normale et Y la composante tangentielle (il y a du frottement) qui appartient au plan tangent au contact en B (plan  $(\vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ). Avec l'hypothèse **Pb plan** cela ne change rien :  $\begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{B, B_0}$ .

**Moralité** : Toutes les actions mécaniques sont modélisables par des glisseurs. Inutile alors d'utiliser les torseurs (l'énoncé ne nous oblige pas à la faire). On va utiliser une notation explicite la plus simple possible pour aller vite !!!

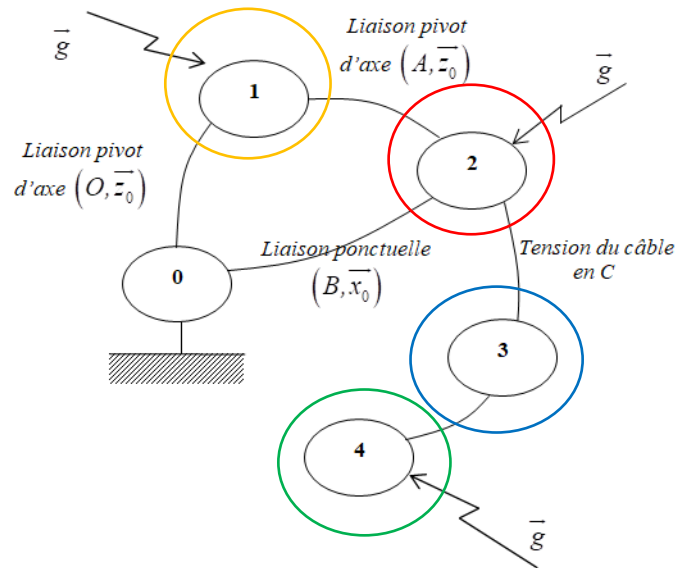
- Exemple : pour la pivot en O, plutôt que d'écrire  $T_{0 \rightarrow 1} = \begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{O, B_0}$  on écrit :  $\overrightarrow{O_{0 \rightarrow 1}} = X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0$ .

Dans cette notation, L'A.M. est un glisseur puisqu'on ne l'écrit pas sous forme torsorielle, dont le point d'application (point de l'axe central du torseur glisseur) est O. Cette force a 2 composantes notées  $X_{01}$  et  $Y_{01}$  respectivement suivant  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  (qui sont inconnues avant résolution).

Il faut comprendre que cette notation permet de gagner du temps par rapport à une notation torsorielle. Elle est équivalente. Elle ne peut être utilisée que si les torseurs sont tous des **glisseurs** !!!!

Dans certains énoncés de concours, la notation torsorielle, même lorsqu'on a à faire qu'à des glisseurs est imposée. Si elle ne l'est pas, autant faire comme en physique, utiliser la notation force. Il faut néanmoins avoir une notation suffisamment détaillée pour que le modèle soit juste. Evitez donc d'écrire une force  $\vec{F}$ . Il faut savoir de quel solide sur quel solide elle modélise l'action, en quel point c'est un glisseur (autrement dit en quel point elle ne génère pas de moment) et dans quelle base on la modélise....

**Q1** : sans les frontières d'isolement en couleur



**Q2** :

- BAME sur 4 (frontière en vert) :

- Action de la pesanteur : CDG non précisé. Je l'appelle G.  $\Rightarrow \overrightarrow{G_{pes \rightarrow 4}} = -M \cdot g \overrightarrow{y_0}$
- Action du câble 3 : liaison rotule même si on sait qu'elle est verticale  $\Rightarrow \overrightarrow{D_{3 \rightarrow 4}} = X_{34} \overrightarrow{x_0} + Y_{34} \overrightarrow{y_0}$

Même si l'énoncé dit « isoler », il faut isoler, appliquer le PFS pour chaque isolement (pas isolation !!) et résoudre !!!

$$\text{TMS (forcément) en D : } \overrightarrow{M_{D,3 \rightarrow 4}} + \overrightarrow{M_{D,pes \rightarrow 4}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} + \overrightarrow{GD} \wedge \overrightarrow{D_{3 \rightarrow 4}} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \overrightarrow{y_0} \wedge (X_{34} \overrightarrow{x_0} + Y_{34} \overrightarrow{y_0}) = \vec{0}$$

D'où :

$$X_{34} = 0$$

$$\text{TRS projeté sur } \overrightarrow{y_0} : Y_{34} - M \cdot g = 0 \Rightarrow Y_{34} = M \cdot g$$

- Ce qui est écrit en rouge n'est pas indispensable
- On a supposé G au « milieu » du rectangle représentant la masse 4
- On trouve un résultat évident. L'action du câble 3 sur 4 est verticale. C'est la tension du câble qui vaut le poids de 4. Attention toutefois. Si on est en dynamique, le TRD ( $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ ) la tension vaudrait le poids + les effets dynamiques (= m.a) si on soulève la masse, - les effets dynamiques si on fait descendre la masse...

- BAME sur 3 (frontière en bleu) :

- Action de 4 : c'est l'action réciproque de  $\overrightarrow{D_{3 \rightarrow 4}}$  soit  $-\overrightarrow{D_{3 \rightarrow 4}}$
- Action de 2 sur 3 :  $\overrightarrow{C_{2 \rightarrow 3}} = X_{23} \overrightarrow{x_0} + Y_{23} \overrightarrow{y_0}$
- Pesanteur négligée

Le TMS en C donne :  $X_{23} = 0$  et le TRS /  $\overrightarrow{y_0}$  :  $Y_{23} = Y_{34} = M \cdot g$  résultat encore évident

Remarques :

- On peut court-circuiter ces équations qui sont évidentes et donner directement les résultats.
- On peut résoudre graphiquement. Chaque solide isolé est soumis à 2 glisseurs. Ils sont donc de même direction (verticale) et de même norme (le poids de 4).

**Q3** : BAME sur 1 (frontière en orange) :

- Pesanteur sur 1 : CDG en O (grâce à la petite masse placée à l'extrémité)  $\Rightarrow \overrightarrow{O_{pes \rightarrow 1}} = -m_1 \cdot g \overrightarrow{y_0}$
- Action de 0 sur 1 : liaison pivot sans frott  $\Rightarrow \overrightarrow{O_{0 \rightarrow 1}} = X_{01} \overrightarrow{x_1} + Y_{01} \overrightarrow{y_1}$  ou  $\overrightarrow{O_{0 \rightarrow 1}} = X'_{01} \overrightarrow{x_0} + Y'_{01} \overrightarrow{y_0}$
- Action de 2 sur 1 : liaisons pivot sans frott  $\Rightarrow \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} = X_{21} \overrightarrow{x_1} + Y_{21} \overrightarrow{y_1}$  ou  $\overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} = X'_{21} \overrightarrow{x_0} + Y'_{21} \overrightarrow{y_0}$



**Remarque :** On peut modéliser les A.M. des deux liaisons pivots dans la base  $B_0$  ou dans la base  $B_1$ . Cela n'a pas de conséquence sur la résolution sauf que les équations peuvent être un peu plus compliquées suivant le choix de la base d'expression. Ici, une interprétation graphique permet de conclure sur la base à privilégier. 1 est soumis à 3 glisseurs dont 2 ( $\vec{O}_{pes \rightarrow 1}$  et  $\vec{O}_{0 \rightarrow 1}$ ) sont des forces qui s'appliquent en O. La somme de ces 2 forces est une force (inconnue) en O. Du coup 1 est en fait soumis à 2 glisseurs (l'un en O, l'autre en A). Le TMS nous dit que ces glisseurs ont même support (la droite (OA) qui passe par les points d'application des forces). La résolution analytique va nous conduire à ces résultats. On va donc privilégier la base  $B_1$  comme base d'expression des forces.

TMS en O : on choisit O comme point de réduction des torseurs ou point de calcul des moments pour faire intervenir l'action de 2 sur 1. Si on choisit A comme point de calcul des moments, cette action n'intervient pas...

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,pes \rightarrow 1} + \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1} + \vec{M}_{O,2 \rightarrow 1} &= \vec{0} \Rightarrow \vec{0} + \vec{0} + \vec{OA} \wedge \vec{A}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} & \vec{A}_{2 \rightarrow 1} \text{ est bien de direction (OA)} \\ \Rightarrow a \vec{x}_1 \wedge (X_{21} \vec{x}_1 + Y_{21} \vec{y}_1) &= \vec{0} \Rightarrow Y_{21} = 0 & \vec{A}_{2 \rightarrow 1} \text{ est bien de direction (OA)} \end{aligned}$$

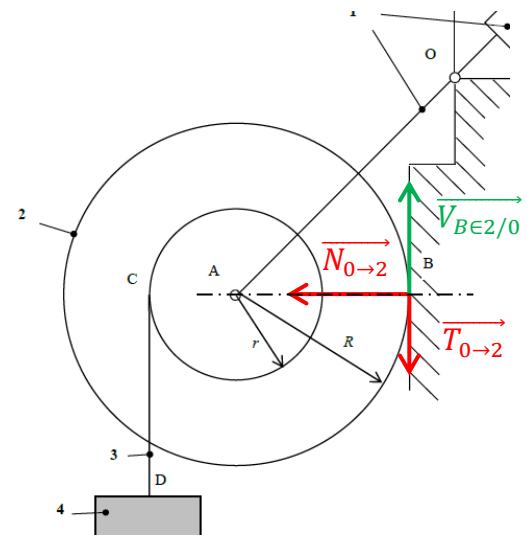
**Remarque :** inutile d'appliquer le TRS puisqu'il fera intervenir les inconnues de liaisons en O qu'on ne cherche pas à connaître.

#### Q4 :

Lorsque les lois de Coulomb sont à appliquer, il faut faire un dessin (au moins au brouillon) pour modéliser correctement l'action mécanique.

Action de 0 sur 2 : La liaison ponctuelle est de normale  $\vec{x}_0$ . La composante normale de la résultante est donc suivant  $\vec{x}_0$ . Lorsqu'il y a rupture d'équilibre (une masse de 4 trop grande par exemple), la poulie 2 tourne autour de A dans le sens trigo. Cela génère une vitesse de glissement  $\vec{V}_{B \in 2/0}$  verticale ascendante (orthoradiale). La composante tangentielle de l'action de 0 sur 2 étant opposée à cette vitesse, elle est verticale descendante.

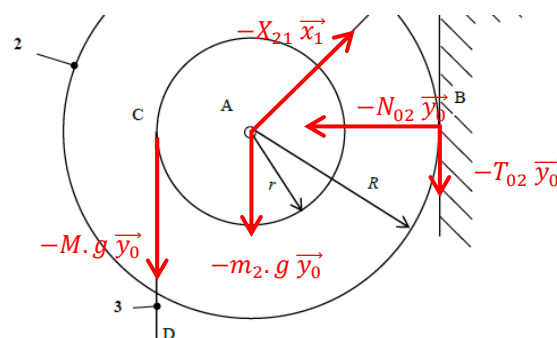
D'où le modèle :  $\vec{B}_{0 \rightarrow 2} = -N_{02} \vec{x}_0 - T_{02} \vec{y}_0$ . En modélisant comme ceci on aura  $N_{02}$  et  $T_{02}$  positifs. A la limite du glissement «  $|T| = N \cdot f$  » se traduit par  $T_{02} = N_{02} \cdot f$  avec f coeff de frott.



BAME sur 2 (frontière en rouge) :

- Pesanteur sur 2 : CDG en A  $\Rightarrow \vec{A}_{pes \rightarrow 1} = -m_2 \cdot g \vec{y}_0$
- Action de 0 sur 2 : Ponctuelle avec frott  $\Rightarrow \vec{B}_{0 \rightarrow 2} = -N_{02} \vec{x}_0 - T_{02} \vec{y}_0$
- Action de 1 sur 2 : réciproque de  $\vec{A}_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow -\vec{A}_{2 \rightarrow 1} = -X_{21} \vec{x}_1$
- Action de 3 sur 2 : réciproque de  $\vec{C}_{3 \rightarrow 2} \Rightarrow -\vec{C}_{2 \rightarrow 3} = -M \cdot g \vec{y}_0$

Graphiquement (au brouillon):



**A ce stade, 2 visions pour la résolution !!!**

1. Le TRS va faire intervenir l'inconnu de liaison  $X_{21}$ . On va essayer le TMS en A pour commencer, de manière à écrire une équation dans laquelle cette inconnue n'intervient pas. C'est une vision plus mathématique (résolution de système d'équations)
2. La rupture d'équilibre se traduit par une rotation autour de l'axe fixe  $(A, \vec{z}_0)$ . Dans ce cas on écrit le TMS (les moments créent ou s'opposent aux mouvements de rotation) au centre de la rotation. Le point A. C'est une vision plus mécanique (on imagine les mouvements hors équilibre)

TMS en A :  $\vec{M}_{A,pes \rightarrow 2} + \vec{M}_{A,0 \rightarrow 2} + \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} + \vec{M}_{A,3 \rightarrow 2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} + \vec{AB} \wedge \vec{B}_{0 \rightarrow 2} + \vec{0} + \vec{AC} \wedge \vec{C}_{3 \rightarrow 2} = \vec{0}$

Ce qui donne :  $R \vec{x}_0 \wedge (-N_{02} \vec{x}_0 - T_{02} \vec{y}_0) - r \vec{x}_0 \wedge -M.g \vec{y}_0 = \vec{0} \Rightarrow (-R T_{02} + r M.g) \vec{z}_0 = \vec{0}$

D'où après projection sur  $\vec{z}_0$  :  $R T_{02} = r M.g$  (1)

Remarque : ce résultat peut être obtenu sans faire de produit vectoriel en revenant à la notion de moment : force\* bras de levier. Le moment créé par l'action du câble en A vaut  $r.M.g$  et est  $> 0$  (de  $\vec{x}_0$  vers  $\vec{y}_0$ ). Le moment créé par l'action du mur vaut  $R T_{02}$  et est  $< 0$  (de  $\vec{y}_0$  vers  $\vec{x}_0$ ). Les moments créés par les autres actions sont nuls (la composante normale  $-N_{02} \vec{x}_0$  est une force passant par A et les actions  $-\vec{A}_{2 \rightarrow 1}$  et  $\vec{A}_{pes \rightarrow 1}$  passent par A). D'où l'auction de moment projetée sur  $\vec{z}_0$  :  $r M.g - R T_{02} = 0$

Cette équation ne suffit pas pour trouver le coeff de frott.

On écrit donc le TRS :  $\vec{A}_{pes \rightarrow 1} + \vec{B}_{0 \rightarrow 2} - \vec{A}_{2 \rightarrow 1} - \vec{C}_{2 \rightarrow 3} = \vec{0}$

TRS /  $\vec{x}_0$  :  $-N_{02} - X_{21} \cos \alpha = 0$  (2)

TRS /  $\vec{y}_0$  :  $-T_{02} - X_{21} \sin \alpha - (m_2 + M)g = 0$  (3)

On ajoute à cela la condition de limite de glissement au point B :  $T_{02} = N_{02}.f$  (4)

Remarque : on a un système de 4 équations ((1),(2),(3),(4)) à 4 inconnues ( $T_{02}, N_{02}, f, X_{21}$ ). On peut résoudre...

Après calculs :  $f = \frac{rM}{rM + (m_2 + M)R} \tan \alpha$

Remarques :

- Si on se limite à ce qui est écrit en noir, la résolution est assez rapide.
- On peut faire une résolution graphique en négligeant la masse de 2 et avec  $\alpha = 45^\circ$ . On utilise le résultat du cours concernant une système soumis à 3 glisseurs. A réfléchir même si c'est hors programme.

Dans le cas où le poids de la poulie 2 est négligé :

- le solide est soumis à 3 glisseurs
- la direction de l'action de 1 sur 2 est connue,
- la poulie est en équilibre si les 3 supports sont concourants, donc seulement si la situation représentée est possible. Donc seulement si l'angle  $\beta$  est inférieur à  $\varphi$ , d'après les lois de Coulomb.

Géométriquement, à la limite du glissement, et puisque  $\alpha = 45^\circ$

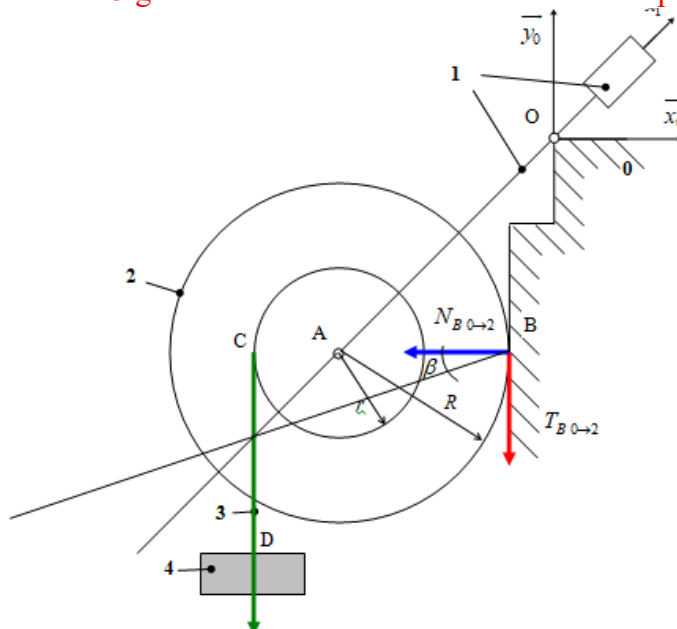
$\frac{r}{R+r} = \tan \varphi$

A.N.  $\varphi = 18,4^\circ$

comparaison :

$\varphi = \arctan \left| \frac{M.r \tan \alpha}{M.r + m_2.R + M.R} \right|$

$\varphi = \arctan \left| \frac{r}{r+R} \right| = 18,4^\circ$



## Exercice 8 : pèse-lettre

**Q1 :**

Le poids de la bielle 2 est négligé

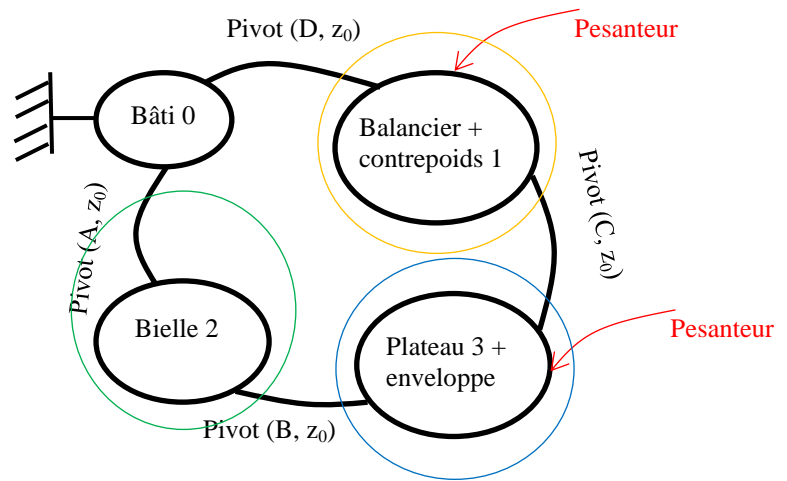
**Q2 :**

Hypothèse : étude plane

Le plan est le plan de représentation du mécanisme soit le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$

Forme des torseurs d'action mécanique :

$$\begin{pmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{pmatrix}$$



Pour chacune des A. M. (pivots d'axe  $\vec{z}_0$  ou pesanteur) le torseur au centre de la liaison ou au point

d'application (CDG) de la pesanteur est un glisseur de la forme :  $\begin{pmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{pmatrix}$ . Comme pour l'exercice 7, la notation

torsorielle n'est pas indispensable. On va modéliser les A. M. par des forces centrales avec les mêmes notations que dans l'exercice 7.

**Q3 :** BAME sur 2 (frontière d'isolement en vert) : on modélise les actions dans la base 2 parce l'objectif est de montrer que les actions mécaniques sur 2 sont de direction  $\vec{x}_2$ .

- $\vec{A}_{0 \rightarrow 2} = X_{02} \vec{x}_2 + Y_{02} \vec{y}_2$
- $\vec{B}_{3 \rightarrow 2} = X_{32} \vec{x}_2 + Y_{32} \vec{y}_2$

TMS en A :  $\vec{AB} \wedge \vec{B}_{3 \rightarrow 2} = \vec{0} \Rightarrow Y_{32} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{3 \rightarrow 2}$  suivant  $\vec{x}_2$

Remarque : Une résolution graphique permet d'aller un peu plus vite. Voici un exemple de rédaction.

La bielle 2 est soumise à deux actions mécaniques modélisables par des glisseurs  $\vec{A}_{0 \rightarrow 2}$  et  $\vec{B}_{3 \rightarrow 2}$ , qui s'appliquent respectivement aux points A et B. Le TMS appliqué à 2 permet de conclure sur la direction de ces actions mécaniques. Elles sont portées toutes les deux par la droite (AB) passant par les points d'application des efforts. L'action en B est donc portée par l'axe  $\vec{x}_2$ .

**Q4 :** BAME sur 3+enveloppe (frontière d'isolement en bleu) :

- Action de la pesanteur sur 3+ enveloppe = glisseur axe central (BC) :  $\vec{C}_{pes \rightarrow 3} = -(m_e + m_3)g \vec{y}_0$
- $\vec{C}_{1 \rightarrow 3} = X_{13} \vec{x}_0 + Y_{13} \vec{y}_0$  (le choix de la base d'expression  $(B_0, B_1, B_2)$  est arbitraire)
- $\vec{B}_{2 \rightarrow 3} = -X_{32} \vec{x}_2$  (action réciproque de  $\vec{B}_{3 \rightarrow 2}$ )

TMS en C :  $\vec{CB} \wedge \vec{B}_{2 \rightarrow 3} = \vec{0} \Rightarrow X_{32} = 0 \Rightarrow \vec{T}_{3 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_B$

Remarques :

- Le CDG de 3 n'est pas donné mais il est sur la droite verticale (BC) pour des raisons de symétrie. Comme c'est un glisseur, on peut le faire « glisser » sur cette droite. D'où le modèle proposé pour le poids de 3 et de l'enveloppe qui est posée au milieu du plateau (ce qui ne sera pas le cas à la question 7)  $\vec{C}_{pes \rightarrow 3} = -(m_e + m_3)g \vec{y}_0$ . On pourrait aussi l'écrire  $\vec{B}_{pes \rightarrow 3} = -(m_e + m_3)g \vec{y}_0$
- Le TMS en appliqué en C pour faire apparaître  $X_{32}$  dans l'équation.
- Le résultat est une action mécanique nulle en B. On verra que cette action n'est plus nulle si l'enveloppe est posée négligemment sur le plateau (non centrée).

**Q5 :**Remarques :

- On laisse de plus en plus de liberté sur le choix des isolements à faire. Il paraît évident d'isoler 1 ou un ensemble de solides avec 1 dedans.
- On n'a **ABSOLUMENT** pas le droit d'isoler 0 puisqu'on ne sait pas à quelles A.M. il est soumis. 0 est le bâti du mécanisme, lié à la terre.....

BAME sur 1 (frontière d'isolement en orange) :

- Action de la pesanteur sur 1 :  $\overrightarrow{G_{1,pes \rightarrow 1}} = -m_1 g \overrightarrow{y_0}$
- $\overrightarrow{D_{0 \rightarrow 1}} = X_{01} \overrightarrow{x_0} + Y_{01} \overrightarrow{y_0}$
- $\overrightarrow{C_{3 \rightarrow 1}} = -\overrightarrow{C_{1 \rightarrow 3}} = -X_{13} \overrightarrow{x_0} - Y_{13} \overrightarrow{y_0}$

TMS en D :  $\overrightarrow{DG_1} \wedge \overrightarrow{G_{1,pes \rightarrow 1}} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{C_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0} \Rightarrow$  cela donne une équation avec beaucoup d'inconnues...

Remarques :

- Le mouvement de 1/0 lorsqu'il y a rupture d'équilibre est une rotation autour de  $(D, \overrightarrow{z_0})$ , donc on applique le **TMS par défaut au point D**. Cela permet de plus de ne pas faire intervenir l'action de 0 sur 1 et ses 2 inconnues de liaison.
- Il faut exprimer  $X_{13}$  et  $Y_{13}$  pour pouvoir continuer. Comme on a appliqué uniquement le TMS à 3 à la question précédente, on reprend cet isolement et on finit l'application du PFS en écrivant le TRS.

TRS à 3:  $\overrightarrow{C_{pes \rightarrow 3}} + \overrightarrow{C_{1 \rightarrow 3}} = \vec{0}$  d'où  $\overrightarrow{C_{3 \rightarrow 1}} = -\overrightarrow{C_{1 \rightarrow 3}} = -(m_e + m_3)g \overrightarrow{y_0}$

On reprend le TMS en D :  $\overrightarrow{DG_1} \wedge \overrightarrow{G_{1,pes \rightarrow 1}} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{C_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0} \Rightarrow b.m_1.g .\sin\beta = a.\cos\theta.(m_e + m_3).g$

Or  $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = \alpha = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{x_0}) + (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{DC}) = \beta + \frac{\pi}{2} + \theta$  d'où  $\beta = \alpha - \theta - (\pi/2)$

d'où :  $-\cos(\alpha - \theta) = \frac{a}{b} \cdot \frac{m_e + m_3}{m_1} \cdot \cos\theta$

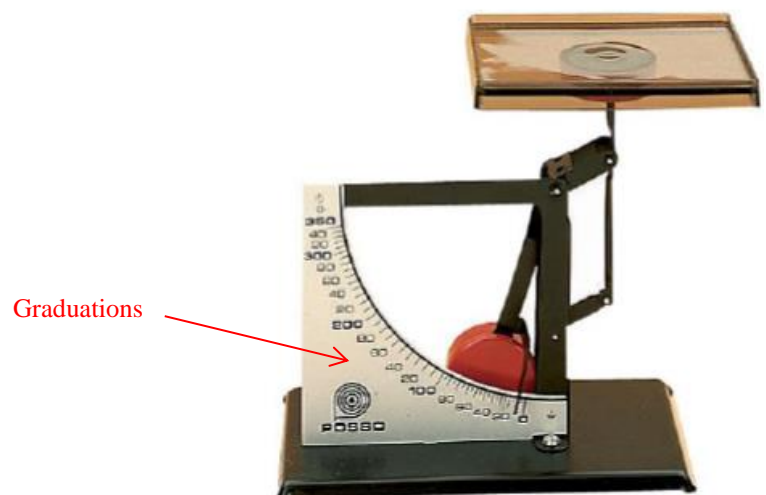
La loi entrée/sortie de cette balance donne la relation entre l'angle de rotation  $\theta$  et la masse de l'enveloppe posée sur le plateau. Elle s'écrit :

$$\tan\theta = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \left( -\cos\alpha - \frac{a}{b} \cdot \frac{m_e + m_3}{m_1} \right)$$

**Q6 :** Applications numériques

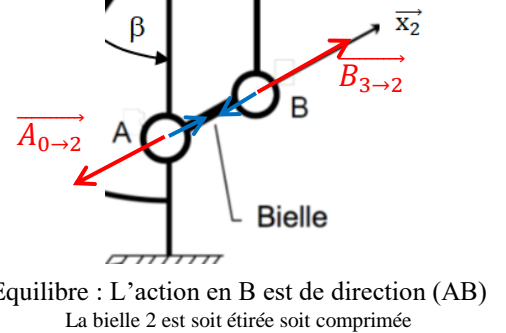
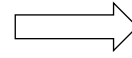
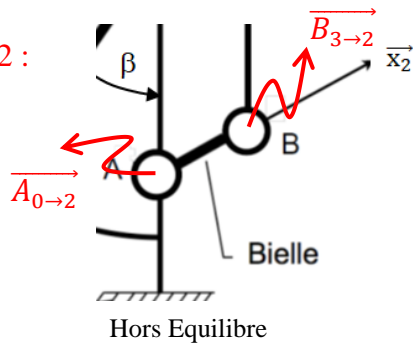
- $m_e = 0 \Rightarrow \theta = 27^\circ$  d'où  $\beta_{\text{mini}} = 13^\circ$
- $m_e = 350g \Rightarrow \theta = -28^\circ$  d'où  $\beta_{\text{mini}} = 68^\circ$

Cela semble cohérent avec la photo. On remarquera que les graduations indiquant la masse de l'enveloppe de cette balance ne sont pas régulières. Cela vient de la loi non linéaire obtenue précédemment.

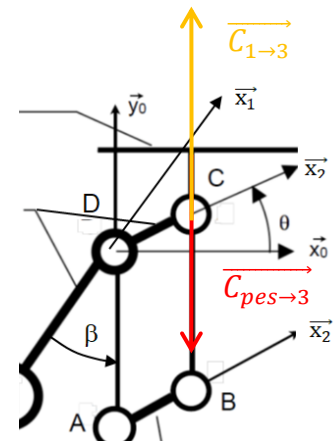
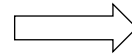
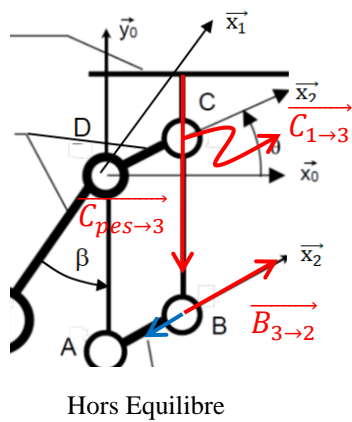


**Interprétation graphique :** (utile pour se représenter les efforts même si les résolutions graphiques ne sont plus au programme dans les filières MP et PSI).

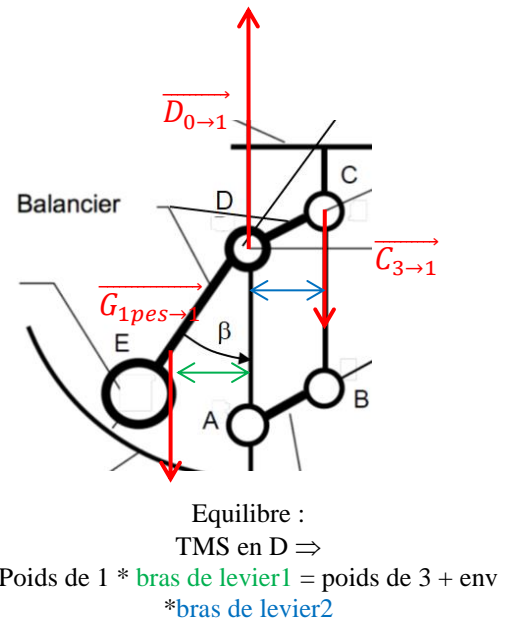
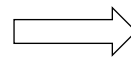
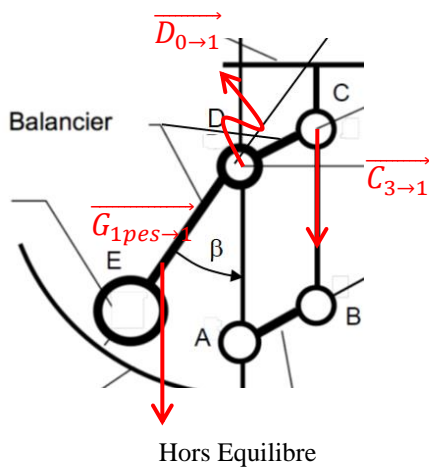
Isolement de la bielle 2 :



Isolement du plateau 3 et de l'enveloppe :



Isolement de 1 :

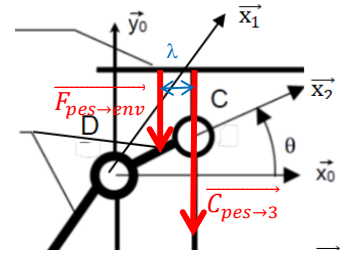


**Q7 : La démarche est la même.**

L'action de la pesanteur sur l'enveloppe s'applique au point F tel que  $d(F, (BC)) = \lambda$  (F à gauche de (BC) par exemple)

BAME sur 3 :

- pesantueur  $\rightarrow$  3 = glisseur axe central (BC) :  $\overrightarrow{C_{pes \rightarrow 3}} = -m_3 g \overrightarrow{y_0}$
- pesantueur  $\rightarrow$  env = glisseur axe central (F,  $\overrightarrow{y_0}$ ) :  $\overrightarrow{F_{pes \rightarrow env}} = -m_e g \overrightarrow{y_0}$
- $\overrightarrow{C_{1 \rightarrow 3}} = X_{13} \overrightarrow{x_0} + Y_{13} \overrightarrow{y_0}$
- $\overrightarrow{B_{2 \rightarrow 3}} = -X_{32} \overrightarrow{x_2}$



$$\text{TMS en C : } \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{B_{2 \rightarrow 3}} + \overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{F_{pes \rightarrow env}} = \vec{0} \Rightarrow l \cdot X_{32} \cdot \cos \theta = \lambda \cdot m_e \cdot g \Rightarrow T_{3 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda \cdot m_e \cdot g}{l \cdot \cos \theta} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_B \quad \text{l'action en B}$$

n'est plus nulle !!!

$$\text{TRS à 3 projeté sur } \overrightarrow{x_0} : X_{13} = X_{32} \cos \theta = \frac{\lambda \cdot m_e \cdot g}{l}$$

$$\text{TRS à 3 projeté sur } \overrightarrow{y_0} : Y_{13} = X_{32} \sin \theta + (m_e + m_3)g = \frac{\lambda \cdot m_e \cdot g}{l} \tan \theta + (m_e + m_3)g$$

BAME sur 1 :

- pesantueur  $\rightarrow$  1 :  $\overrightarrow{G_{1 \rightarrow pes \rightarrow 1}} = -m_1 g \overrightarrow{y_0}$
- $\overrightarrow{D_{0 \rightarrow 1}} = X_{01} \overrightarrow{x_0} + Y_{01} \overrightarrow{y_0}$
- $\overrightarrow{C_{3 \rightarrow 1}} = -\overrightarrow{C_{1 \rightarrow 3}} = -X_{32} \cos \theta \overrightarrow{x_0} - (X_{32} \sin \theta + (m_e + m_3)g) \overrightarrow{y_0}$

$$\text{TMS en D : } \overrightarrow{DG_1} \wedge \overrightarrow{G_{1 \rightarrow pes \rightarrow 1}} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{C_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -b \sin \beta & 0 & a \cos \theta & -X_{32} \cos \theta \\ -b \cos \beta & -m_1 g & a \sin \theta & -(m_e + m_3)g - X_{32} \sin \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - \\ - \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow X_{32} \cos \theta \cdot \sin \theta \text{ s'élimine. On retrouve la même équation qu'à la question 4 :}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \left( -\cos \alpha - \frac{a}{b} \cdot \frac{m_e + m_3}{m_1} \right)$$

**Remarques et conclusion :**

- Le positionnement de l'objet sur le plateau n'a pas d'influence sur la mesure de sa masse. Il peut être placé sur le plateau sans précaution grâce à l'utilisation d'une structure en parallélogramme déformable. Cette structure est souvent utilisée pour réaliser des capteurs d'efforts (voir Problème 2 des problèmes de statique)
- La **résolution analytique proposée est la plus rapide**. Si on résume la méthode suivie dans ce type d'exercice où les actions mécaniques sont toutes modélisables par des glisseurs :
  - On isole le solide ou ensemble de solides (voir exos suivants pour les ensembles de solides isolés) soumis à 2 glisseurs. Le TMS permet dans ce cas de trouver des directions de forces. Donc 2.
  - On isole le solide ou ensemble de solides faisant intervenir comme action extérieure la donnée d'entrée. Ici la masse de l'enveloppe. Donc 3.
  - On isole le solide ou ensemble de solides faisant intervenir comme action extérieure la donnée de sortie. Ici l'angle de rotation dont va tourner 1 lorsqu'on pose l'enveloppe sur le plateau 3. Donc 1.
- On peut procéder par une **méthode systématique mais plus longue**. C'est celle des logiciels. On isole chacun des solides (sauf 0 !!!) et on applique le PFS. On cherche ensuite à résoudre le système d'équations obtenues. À éviter. On attend de vous que vous compreniez la mécanique, comment se transmettent les efforts et les mouvements dans le cas de la dynamique. C'est pour cela qu'une interprétation graphique (au brouillon) peut-être utile.

**Exercice 9** : compacteur Caterpillar

L'objectif de l'exercice est de valider le choix du vérin placé entre les points P et Q (voir le schéma cinématique proposé). Celui-ci permet lorsqu'il s'allonge ou se rétrécit de faire varier l'angle  $\phi$  de braquage entre les deux demi-bâtis. Cela permet au véhicule de suivre des trajectoires circulaires. Indispensable pour tasser le bitume dans de nombreux cas de réfexion de voiries.

**Q1** : C'est une question de géométrie. Elle permet d'établir le lien entre les paramètres de l'étude. Elle peut se traiter par fermeture géométrique donc en écrivant la relation de Chasles faisant intervenir les centre de liaisons P, Q et R. Ce la revient à ce que propose l'énoncé.

$$\overrightarrow{QR} = -d.\overrightarrow{x_{0av}} - e.\overrightarrow{y_{0av}} - f.\overrightarrow{x_{0ar}} + g.\overrightarrow{y_{0ar}}$$

avec 
$$\begin{cases} \overrightarrow{x_{0av}} = \cos(\phi)\overrightarrow{x_{0ar}} + \sin(\phi)\overrightarrow{y_{0ar}} \\ \overrightarrow{y_{0av}} = -\sin(\phi)\overrightarrow{x_{0ar}} + \cos(\phi)\overrightarrow{y_{0ar}} \end{cases}$$

on obtient 
$$\overrightarrow{QR} = [-d.\cos(\phi) + e.\sin(\phi) - f].\overrightarrow{x_{0ar}} + [-d.\sin(\phi) - e.\cos(\phi) + g].\overrightarrow{y_{0ar}}$$

relation entre les 2 angles :

$$\overrightarrow{QR} = [-d.\cos(\phi) + e.\sin(\phi) - f].\overrightarrow{x_{0ar}} + [-d.\sin(\phi) - e.\cos(\phi) + g].\overrightarrow{y_{0ar}}$$

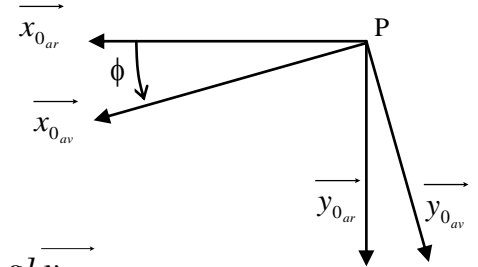
$$= \rho.\overrightarrow{v_v} \text{ avec } \overrightarrow{v_v} = -\sin(\Psi).\overrightarrow{x_{0ar}} + \cos(\Psi).\overrightarrow{y_{0ar}}$$

donc : 
$$\psi = \text{Arctan} \frac{d.\cos(\phi) - e.\sin(\phi) + f}{-d.\sin(\phi) - e.\cos(\phi) + g}$$

course : 
$$c = \left\| \overrightarrow{QR}_{(-32^\circ)} \right\| - \left\| \overrightarrow{QR}_{(+32^\circ)} \right\| \text{ avec } \begin{cases} \overrightarrow{QR}_{(-32^\circ)} = [-476,88].\overrightarrow{x_{0ar}} + [386,53].\overrightarrow{y_{0ar}} \\ \overrightarrow{QR}_{(+32^\circ)} = [-349,69].\overrightarrow{x_{0ar}} + [269,94].\overrightarrow{y_{0ar}} \end{cases}$$

soit 
$$c = 613,85 - 441,76 = 172,09 \text{ mm}$$

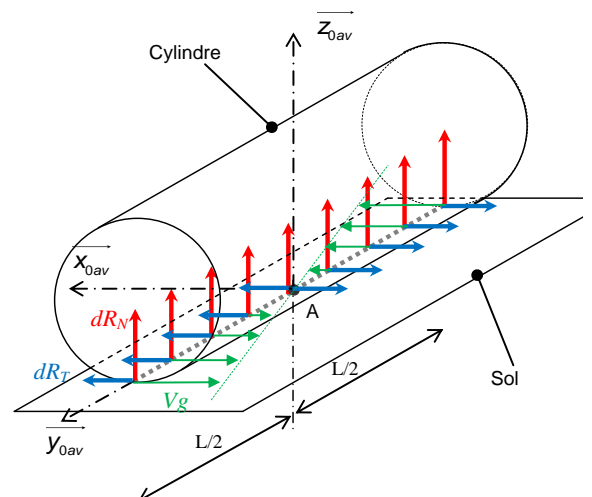
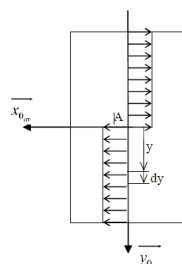
La course  $c$  du vérin est de  $172,09 \text{ mm}$ .



**Q2** : On s'intéresse au contact cylindre/sol qui est modélisable par une liaison linéaire rectiligne de ligne de contact  $(A, \overrightarrow{y_{0av}})$  et de normale  $(A, \overrightarrow{z_{0av}})$ . On donne le torseur global de l'action mécanique. Comme on s'intéresse à un mouvement de braquage du véhicule, on modélise les actions locales au contact cylindre/sol dans le cas où le cylindre tourne autour de la normale  $(A, \overrightarrow{y_{0av}})$ . On doit prendre en compte le frottement puisqu'on utilise le véhicule sur du bitume chaud (presque collant).

Sur la figure ci-dessous sont représentées, les action mécaniques locales (normales et tangentielles) et les vitesses de glissement ( $\perp$  axe  $(A, \overrightarrow{z_{0av}})$ ) qui sont en distribution triangulaire (mouvement de rotation autour de  $(A, \overrightarrow{z_{0av}})$ ).

Dans le modèle de Coulomb, la composante tangentielle  $dR_T$  (en bleu) de la résultante de l'action du sol sur le cylindre est opposée à la vitesse de glissement au point considéré du cylindre par rapport au sol ( en vert). Ceci justifie la direction et le sens des composantes tangentielles représentées sur le schéma de l'énoncé.



Le torseur global de l'action du sol sur le cylindre s'écrit :

$$T_{sol \rightarrow cyl} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{sol \rightarrow cyl}} \\ \overrightarrow{M_{A, sol \rightarrow cyl}} \end{array} \right\}_{A, B_{0av}} = \left\{ \begin{array}{l} \int p_0 dy \overrightarrow{z_{0av}} \pm f p_0 dy \overrightarrow{x_{0av}} \\ \int \overrightarrow{AM} \wedge (p_0 dy \overrightarrow{z_{0av}} \pm f p_0 dy \overrightarrow{x_{0av}}) \end{array} \right\}_A$$

La pression de contact  $p_0$  est linéique et on intègre sur l'ensemble de la ligne de contact cylindre/sol de longueur L.

**Remarque :**  $p_0$  est donnée. On peut néanmoins se poser la question de comment on l'obtiendrait. Il suffit pour cela d'isoler l'ensemble du véhicule avec ses 2 demi-bâts est d'appliquer le TRS en projection sur l'axe verticale  $\overrightarrow{z_{0av}} = \overrightarrow{z_{0ar}}$ .

BAME sur le véhicule = E :

- pesanteur  $\rightarrow E$  en appelant G le centre de gravité (non indiqué) :  $\overrightarrow{G_{pes \rightarrow E}} = -M_t \cdot g \overrightarrow{z_{0av}}$  glisseur en G
- action du sol sur chaque cylindre :  $T_{sol \rightarrow cyl} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{sol \rightarrow cyl}} \\ \overrightarrow{M_{A, sol \rightarrow cyl}} \end{array} \right\}_{A, B_{0av}}$

Le TRS projeté sur  $\overrightarrow{z_{0av}}$  s'écrit :  $-M_t \cdot g + 2 \cdot \overrightarrow{R_{sol \rightarrow cyl}} \cdot \overrightarrow{z_{0av}} = -M_t \cdot g + 2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p_0 dy = -M_t \cdot g + 2 \cdot p_0 \cdot L = 0$

D'où :  $p_0 = \frac{M_t \cdot g}{2L}$

On est obligé d'intégrer par intervalle suivant y à cause du changement de signe de la composante tangentielle :

**Pour la résultante :**

Modélisation locale : pour  $-\frac{L}{2} \leq y \leq 0$  :  $d\overrightarrow{R}_{sol \rightarrow cyl}^- = -f \cdot p_0 \cdot dy \cdot \overrightarrow{x_{0av}} + p_0 \cdot dy \cdot \overrightarrow{z_{0av}}$  à la limite du glissement

pour  $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$  :  $d\overrightarrow{R}_{sol \rightarrow cyl}^+ = f \cdot p_0 \cdot dy \cdot \overrightarrow{x_{0av}} + p_0 \cdot dy \cdot \overrightarrow{z_{0av}}$  à la limite du glissement

Modélisation globale :  $\overrightarrow{R}_{sol \rightarrow cyl} = \int_{-\frac{L}{2}}^0 d\overrightarrow{R}_{sol \rightarrow cyl}^- + \int_0^{\frac{L}{2}} d\overrightarrow{R}_{sol \rightarrow cyl}^+ = \frac{M_t \cdot g}{2} \cdot \overrightarrow{z_{0av}}$

**Pour le moment :**

Modélisation locale :  $d\overrightarrow{M}_A = \vec{0} \Rightarrow d\overrightarrow{M}_M = \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{R}_{sol \rightarrow cyl}$

Modélisation globale :  $\overrightarrow{M}_{A, sol/cylindre} = 2 \cdot \int_0^{L/2} y \cdot y_{0av} \wedge f \cdot \frac{M_t \cdot g}{2L} \cdot dy \cdot \overrightarrow{x_{0av}} = -f \cdot \frac{M_t \cdot g}{L} \cdot \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{L/2} \cdot \overrightarrow{z_{0av}}$

Soit finalement :  $\overrightarrow{M}_{A, sol/cylindre} = -\frac{\tan(\varphi) \cdot M_t \cdot g \cdot L}{8} \cdot \overrightarrow{z_{0av}}$

$\varphi$  est l'angle de frottement (demi angle au sommet du cône de frottement. Sa tangente est le coefficient de frottement)

**Q3 :** On isole le demi-bâti avant pour que l'effort du vérin apparaisse dans le BAME.

Isolons le demi-bâti avant et écrivons le théorème du moment statique au point P, en projection sur  $\overrightarrow{z_{0av}}$ .

La rupture d'équilibre (par un effort du vérin supérieur à l'effort assurant l'équilibre) se traduit par une rotation autour de la liaison pivot d'axe  $(P, \overrightarrow{z_{0av}})$ . Donc c'est l'équation de moment donnée par le TMS qui permettra de répondre à la question.



BAME sur demi-bâti avant en spécifiant les actions qui créent des moments suivant  $(P, \overrightarrow{z_{0av}})$  :

- la pesanteur portée par  $\overrightarrow{z_{0av}}$  qui ne crée pas de moment sur  $(P, \overrightarrow{z_{0av}})$ . Puisque c'est un glisseur suivant  $\overrightarrow{z_{0av}}$ . Par le produit vectoriel (Babar) les moments créés ne peuvent être que  $\perp \overrightarrow{z_{0av}}$ . Ça tombe bien, l'énoncé ne donne pas la position du CDG de chaque demi-bâti.
- la liaison pivot d'axe  $(P, \overrightarrow{z_{0av}})$  parfaite, donc le moment est nul sur  $(P, \overrightarrow{z_{0av}})$ . Forme du torseur :  $\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{P, B_{0av}}$

Attention, par d'hypothèse Pb plan.

- l'action du sol sur le cylindre avec le moment sur  $(P, \overrightarrow{z_{0av}})$  qui vaut  $-\frac{\tan(\varphi) \cdot M_t \cdot g \cdot L}{8}$ . On applique Babar

pour passer du point A au point P :  $\overrightarrow{M_{P, sol \rightarrow cyl}} = \overrightarrow{M_{A, sol \rightarrow cyl}} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{R_{sol \rightarrow cyl}}$ . Or  $\overrightarrow{R_{sol \rightarrow cyl}} \parallel \overrightarrow{z_{0av}}$  donc  $\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{R_{sol \rightarrow cyl}}$  ne crée pas de moment suivant  $\overrightarrow{z_{0av}}$ .

- l'action du vérin au point Q représentée par :  $T_{(vérin \rightarrow demi-bâti)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_v & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(u_v, \overrightarrow{v_v}, \overrightarrow{z_{0av}})}$

**Remarque très importante sur cette modélisation** : si on modélise dans la base  $B_{0av}$  sans prendre d'hypothèse particulière sur l'action du vérin, on retrouve un torseur à 5 inconnues puisqu'on a une liaison pivot sans frottement en Q : Forme du torseur :

$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{Q, B_{0av}}$ . On ne pourra pas résoudre le problème. Trop d'inconnues à déterminer.

Il faut d'abord isoler l'ensemble corps + tige vérin et changer la modélisation des liaisons en P et Q. un vérin (à cause du joint caoutchouteux placé entre piston et corps qui assure l'étanchéité des 2 chambres alimentées en pression hydraulique) ne peut être soumis qu'à des forces axiales. Il est toujours monté en liaisons sphériques (du coup l'énoncé de ce sujet est à corriger) à ses

extrémités. Forme des torseurs en P et Q quelle que soit la base d'expression :  $\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{P \text{ ou } Q}$ .

En appliquant le TMS à l'ensemble corps + tige vérin, on montre que les actions en P et Q sont portées par l'axe du vérin donc la droite PQ (vecteur  $\overrightarrow{v_v}$ ), puisque l'ensemble est soumis à 2 glisseurs.

- D'où la modélisation proposée qui ne fait apparaître qu'une inconnue  $F_v$  et qui précise la direction de la force en Q, celle de la droite (PQ) !!!!!
- D'où l'importance de la modélisation des actions mécaniques. Si on ne fait cela, on ne peut pas répondre à la question.

Déterminons  $\overrightarrow{M_{P(vérin \rightarrow demi-bâti)}}$  :  $\overrightarrow{M_{P(vérin \rightarrow demi-bâti)}} = \overrightarrow{M_{Q(vérin \rightarrow demi-bâti)}} + \overrightarrow{PQ} \wedge F_v \cdot \overrightarrow{v_v}$

$$\overrightarrow{M_{P(vérin \rightarrow demi-bâti)}} = \vec{0} + \begin{vmatrix} d \cdot \cos(\phi) - e \cdot \sin(\phi) & -F_v \cdot \sin(\Psi) \\ d \cdot \sin(\phi) + e \cdot \cos(\phi) & F_v \cdot \cos(\Psi) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ce calcul revient à faire moment = force} \cdot \text{bras de levier}$$

mais ici la géométrie est compliquée donc le bras de levier compliqué à calculer...

on a  $\overrightarrow{M_{P(vérin \rightarrow demi-bâti)}} = \{ [d \cdot \cos(\phi) - e \cdot \sin(\phi)] \cdot F_v \cdot \cos(\Psi) + [d \cdot \sin(\phi) + e \cdot \cos(\phi)] \cdot F_v \cdot \sin(\Psi) \} \cdot \overrightarrow{z_{0av}}$

En projetant les moments des actions extérieures sur  $\overrightarrow{z_{0av}}$  on obtient :

$$-\frac{\tan(\varphi) \cdot M_t \cdot g \cdot L}{8} + \{ [d \cdot \cos(\phi) - e \cdot \sin(\phi)] \cdot F_v \cdot \cos(\Psi) + [d \cdot \sin(\phi) + e \cdot \cos(\phi)] \cdot F_v \cdot \sin(\Psi) \} = 0$$

$$\text{soit } F_v = \frac{\tan(\varphi) \cdot M_t \cdot g \cdot L}{8 \cdot \{ [d \cdot \cos(\phi) - e \cdot \sin(\phi)] \cdot \cos(\Psi) + [d \cdot \sin(\phi) + e \cdot \cos(\phi)] \cdot \sin(\Psi) \}}$$

$$\text{avec } \phi = -32^\circ \text{ on a } \Psi = 51^\circ \text{ (cf Q1) et } F_v = 6910 \text{ N}$$

**Q4** : Cas le plus défavorable :  $F_v = 6910 \text{ N}$  en rentrée de tige.

Calculons la pression nécessaire pour fournir cet effort :  $p = \frac{F_v}{\frac{\pi}{4}(D_p^2 - D_t^2)}$

Ce qui nous donne  $p = 2,77 \text{ MPa}$  (=2.77 N/m<sup>2</sup>) soit 27,7 bar (27.7 daN/cm<sup>2</sup>)

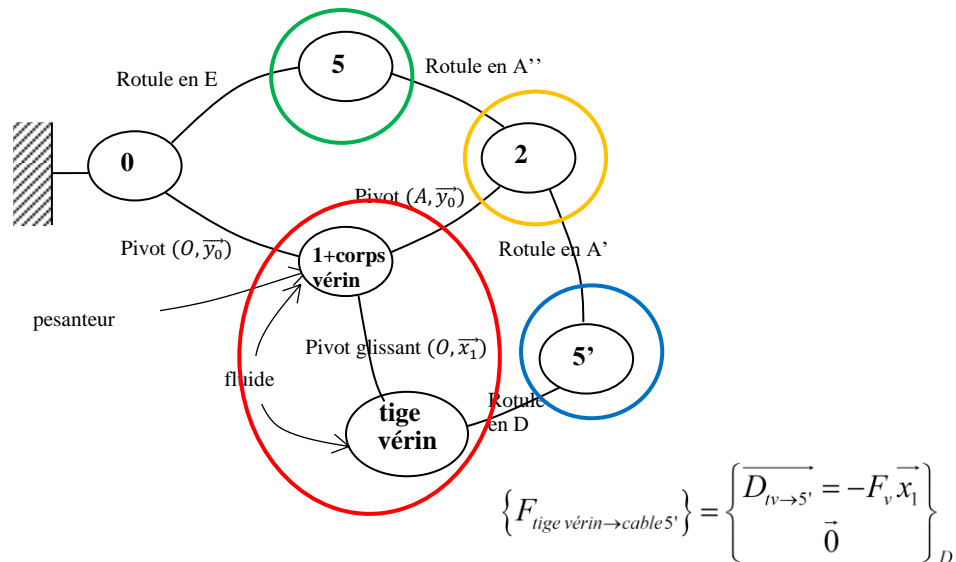
La pression nécessaire est inférieure à la pression d'alimentation possible, le vérin convient.

**Exercice 10 : porte d'avion**

L'étude porte sur un mécanisme d'aide à la manipulation d'une porte d'avion qui pèse 140 kg et qui doit rester manœuvrable par tous les membres de l'équipage. C'est un système composé de deux vérins oléopneumatiques (huile pour amortir le mouvement et air comprimé pour générer des efforts) et d'un ensemble câble + poulie pour transmettre les efforts. Pour des questions d'encombrement chaque ensemble vérin+câble+poulie se situe de part et d'autre de la porte. La symétrie de la géométrie et des efforts permet donc d'adopter l'hypothèse Pb plan. On étudie le mécanisme dans le plan de symétrie de la porte.

Dans ce problème, la démarche d'isolement est donnée. La formulation torsorielle n'est pas indispensable même si l'action du vérin sur le câble 5' est donnée sous forme d'un torseur glisseur. Les liaisons et les efforts extérieurs sont tous modélisables par des glisseurs. Je choisis une notation sans torseur comme dans les exos 7 et 8.

Le graphe des liaisons avec les actions mécaniques n'est pas demandé, on peut le faire au brouillon pour faciliter les BAME sur ce qu'on isole. Le câble est découpé en différents tronçons (rectiligne (A''E et A'D) ou circulaire A''A') chacun considéré comme un solide indéformable. Les liaisons des différentes portions du câble avec les autres solides peuvent être modélisées par des liaisons rotules puisqu'il n'y a pas transmission de moment.



**Q1-** Le BAME n'est pas demandé. On va au plus vite en traduisant directement les « bonnes » équations du PFS.

- TMS appliqué à **5** (frontière en vert) : 5 est soumis à 2 glisseurs  $\overrightarrow{E_{0 \rightarrow 5}}$  et  $\overrightarrow{A''_{2 \rightarrow 5}}$  de direction (A''E) donc portées par  $\vec{x}_1$ .

- TMS appliqué à **5'** (frontière en bleu) : 5' est soumis à 2 glisseurs  $\overrightarrow{D_{tv \rightarrow 5'}}$  et  $\overrightarrow{A'_{2 \rightarrow 5'}}$  de direction (A'D) donc portées par  $\vec{x}_1$ .

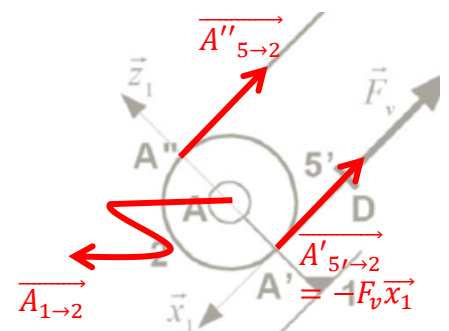
TRS appliqué à **5'** :  $\overrightarrow{A'_{2 \rightarrow 5'}} + \overrightarrow{D_{tv \rightarrow 5'}} = \vec{0}$  d'où  $\overrightarrow{A'_{2 \rightarrow 5'}} = F_v \vec{x}_1$

- TMS appliqué à **2** au point A (frontière en orange) :

$$\overrightarrow{AA''} \wedge \overrightarrow{A''_{5 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{A'_{5' \rightarrow 2}} + \overrightarrow{AA} \wedge \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0}$$

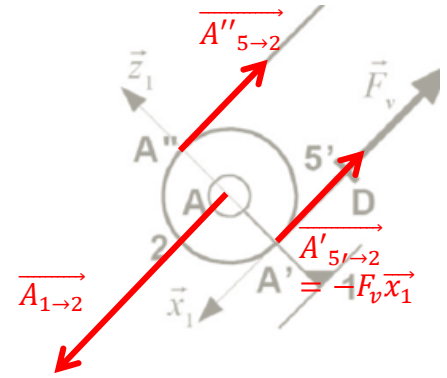
avec  $\overrightarrow{AA''} = -\overrightarrow{AA'} = b\vec{z}_1$  donc  $(\overrightarrow{A''_{5 \rightarrow 2}} + F_v \vec{x}_1) \wedge -b\vec{z}_1 = \vec{0}$

d'où  $\overrightarrow{A''_{5 \rightarrow 2}} = -F_v \vec{x}_1 \Rightarrow T_{5 \rightarrow 2} = \left\{ \begin{matrix} -F_v \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{A''}$



Interprétation graphique du TMS sur 2

**Q2-** TRS appliqué à 2 :  $\overrightarrow{A''_{5 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{A'_{5' \rightarrow 2}} + \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0}$   
 d'où  $\overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} = 2F_v \vec{x}_1 \Rightarrow T_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} 2F_v \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$



Interprétation graphique du PFS sur 2

**Q3-** On doit faire intervenir la masse de 1 donc on isole {1 + corps + tige vérin} (frontière en rouge) : cet ensemble est soumis aux actions du brin 5', de 2, de 0 et de la gravité. (on isole corps + tige vérin pour ne pas faire intervenir la liaison pivot glissant (corps/tige vérin)).

La condition pour que la porte se referme toute seule est :  $\overrightarrow{M}_{(O, \bar{i} \rightarrow \bar{i})} \cdot \vec{y}_0 < 0$  dans ce cas le moment créé par les actions mécaniques va faire tourner autour du point O la porte dans le sens  $\vec{x}_0$  vers  $\vec{z}_0$  (sens indirect donc  $< 0$ )

$$\overrightarrow{M}_{(O, \bar{i} \rightarrow \bar{i})} = 2\overrightarrow{M}_{(O, 5' \rightarrow 1v)} + 2\overrightarrow{M}_{(O, 2 \rightarrow 1)} + \overrightarrow{M}_{(O, pes \rightarrow 1)} + \cancel{\overrightarrow{M}_{(O, 0 \rightarrow 1)}} \quad (\text{les « 2 » parce que le système est doublé, systèmes identiques de part et d'autre de la porte})$$

$$\overrightarrow{M}_{(O, \bar{i} \rightarrow \bar{i})} = 2\left(\cancel{\overrightarrow{M}_{(D, 5' \rightarrow 1v)}} + \overrightarrow{OD} \wedge (F_v \vec{x}_1)\right) + 2\left(\cancel{\overrightarrow{M}_{(A, 1 \rightarrow 2)}} + \overrightarrow{OA} \wedge -2F_v \vec{x}_1\right) + \left(\cancel{\overrightarrow{M}_{(G, pes \rightarrow 1)}} + \overrightarrow{OG} \wedge (-Mg \vec{z}_0)\right)$$

or  $\overrightarrow{OD}$  est porté par  $\vec{x}_1$ ,  $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1 + b\vec{z}_1$ ,  $\overrightarrow{OG} = c\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$

$$\overrightarrow{M}_{(O, \bar{i} \rightarrow \bar{i})} = -2(2bF_v \vec{y}_0) + (Mg(c \cos \alpha + d \sin \alpha) \vec{y}_0)$$

$$\text{donc } \overrightarrow{M}_{(O, \bar{i} \rightarrow \bar{i})} \cdot \vec{y}_0 = Mg(c \cos \alpha + d \sin \alpha) - 4bF_v$$

La porte se referme toute seule si  $Mg(c \cos \alpha + d \sin \alpha) - 4bF_v < 0$

$$\text{donc si } F_v(\alpha) > \frac{Mg(c \cos \alpha + d \sin \alpha)}{4b}$$

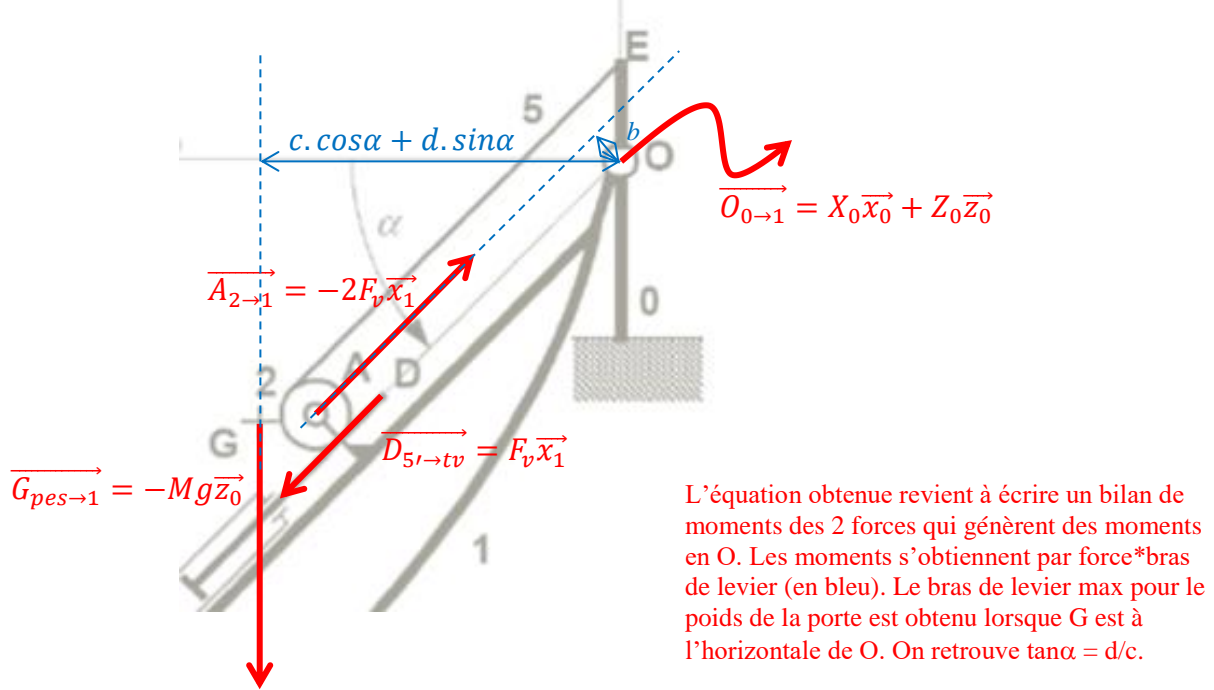
Or l'effort  $F_v$  est constant et doit suffire à faire refermer la porte toute seule. Il doit donc être suffisant sur toute la fermeture.

Le maximum de l'expression  $\frac{Mg(c \cos \alpha + d \sin \alpha)}{4b}$  est pour  $(-c \sin \alpha + d \cos \alpha) = 0$  soit, pour

$$\tan \alpha = \frac{d}{c} \quad \text{ou pour } \sin \alpha = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} \quad \text{et } \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

$$\text{Donc en définitive, } F_v > \frac{Mg\sqrt{c^2 + d^2}}{4b}$$

$$\text{A.N. : } F_v > \frac{Mg\sqrt{c^2 + d^2}}{4b} = 2560N$$



**Q4-** On reprend le même isolement qu'à la question précédente en ajoutant l'action de l'opérateur en P au BAME précédent.

Si l'opérateur exerce un effort  $F_m$  vertical en P : La condition de fermeture est toujours la même :

$$\overrightarrow{M}_{(O, \dot{i} \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0 < 0$$

$$\overrightarrow{M}_{(O, \dot{i} \rightarrow 1)} = 2\overrightarrow{M}_{(O, 5 \rightarrow 1v)} + 2\overrightarrow{M}_{(O, 2 \rightarrow 1)} + \overrightarrow{M}_{(O, pes \rightarrow 1)} + \overrightarrow{M}_{(O, F_m \rightarrow 1)}$$

$$\overrightarrow{M}_{(O, \dot{i} \rightarrow 1)} = (Mg(c \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin \alpha) - 4bF_v) \vec{y}_0 + \overrightarrow{M}_{(P, F_m \rightarrow 1)} + \overrightarrow{OP} \wedge F_m \vec{z}_0 \text{ avec } \overrightarrow{OP} = 2c\vec{x}_1$$

$$\overrightarrow{M}_{(O, \dot{i} \rightarrow 1)} = (Mg(c \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin \alpha) - 4bF_v) \vec{y}_0 - 2cF_m \cos \alpha \vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{M}_{(O, \dot{i} \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0 = Mg(c \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin \alpha) - 4bF_v - 2cF_m \cos \alpha$$

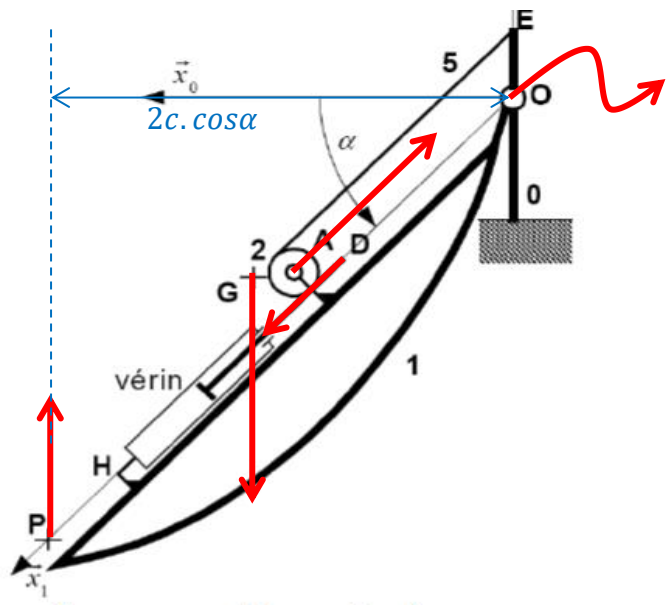
La condition de fermeture se traduit donc par :  $F_m > \frac{Mg(c \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin \alpha) - 4bF_v}{2c \cos \alpha}$

Au démarrage, pour  $\alpha = 45^\circ$ ,  $F_m > \frac{Mg\sqrt{2}(c+d) - 8bF_v}{2c\sqrt{2}}$

AN : pour  $F_v = 1935N$ ,  $F_m > \frac{Mg\sqrt{2}(c+d) - 8bF_v}{2c\sqrt{2}} = 20,3N$  au démarrage (équivalent à soulever une

masse de 2kg !)

Interprétation graphique : on ajoute le moment de l'action de l'opérateur en O.  
force\*bras de levier =  $F_m * 2c \cos \alpha$

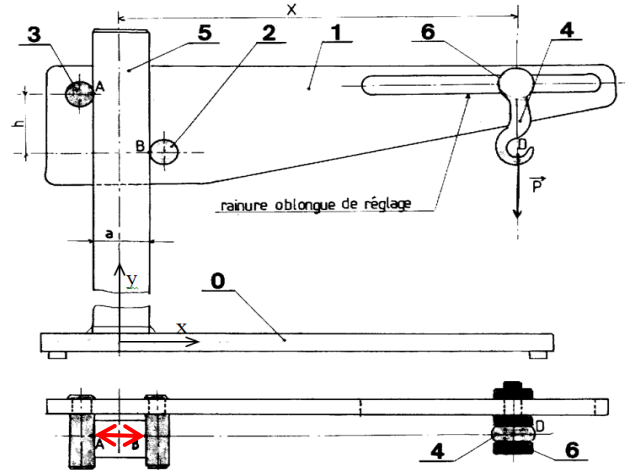


**Exercice 11 : dispositif expérimental**

Il s'agit d'un système de potence, pour lequel le phénomène d'arc-boutement va empêcher la chute de l'ensemble  $E = 1+2+3+4+6$ .

Il ne peut y avoir arc-boutement qu'à partir du moment où le coefficient de frottement (contact 3/5 et contact 2/5) est suffisant et qu'un jeu existe dans la liaison de l'ensemble avec le bâti 5 (la distance horizontale entre A et B est légèrement supérieure à la largeur  $a$  de 5)

Expérimentalement, il est assez évident de comprendre que si la distance  $x$  est faible, l'ensemble E tombe sous l'effet de la charge (poids P) installée en D. Pour une valeur suffisante de  $x$ , l'ensemble E reste en équilibre. On passe d'une liaison glissière entre E et 5 à une liaison fixe.



On cherche dans un premier temps, la valeur de  $x$  limite correspondant au début de glissement.

Hypothèse : Pb plan donc  $T_{ext \rightarrow E} = \begin{pmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{pmatrix}$ . Aux points A et B, les liaisons sont des ponctuelles ou linéaires

annulaires qui ne transmettent pas de moment autour de  $\vec{z}$ . Donc  $T_{ext \rightarrow E} = \begin{pmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_{A \text{ ou } B \text{ ou } D}$ . On a donc des

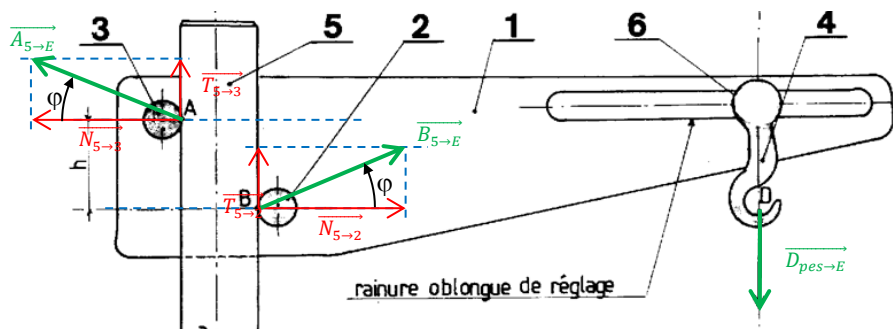
glisseurs. La notation torsorielle n'est pas indispensable.

BAME sur E :

- Action de la pesanteur sur E (on néglige le poids propre de chacune des pièces. Seule la pesanteur sur la charge est prise en compte) :  $\vec{D}_{pes \rightarrow E} = -P \vec{y}$
- Action de 5 sur E en A :  $\vec{A}_{5 \rightarrow E} = \vec{A}_{5 \rightarrow 3} = \vec{N}_{5 \rightarrow 3} + \vec{T}_{5 \rightarrow 3} = -N_A \vec{x} + T_A \vec{y}$  avec  $T_A = f \cdot N_A$  à la limite du glissement ( $N_A$  et  $T_A > 0$  avec cette modélisation de l'action)  
 Cette modélisation introduit deux composantes reliées par la loi de coulomb. On va choisir une modélisation plus simple encore (une seule inconnue à déterminer) :  $\vec{A}_{5 \rightarrow E} = -A \cos \varphi \vec{x} + A \sin \varphi \vec{y}$  avec  $A > 0$  et  $\varphi$  l'angle de frottement dont la tangente vaut le coefficient de frottement  $f$ .
- Action de 5 sur E en B :  $\vec{B}_{5 \rightarrow E} = B \cos \varphi \vec{x} + B \sin \varphi \vec{y}$

Remarques :

- si glissement, la vitesse de glissement en A ou B ( $\vec{V}_{A \in 3/5}$ ) est verticale descendante, donc les composantes tangentielles dues au frottement ( $\vec{T}_{5 \rightarrow 3}$  et  $\vec{T}_{5 \rightarrow 2}$ ) en A et B sont opposées à cette vitesse donc verticales ascendantes.
- On choisit la modélisation en vert qui introduit le minimum d'inconnues à déterminer. A et B. La troisième inconnue à déterminer est  $x$ . Du coup on a un problème à 3 inconnues et 3 équations données par le PFS. Inutile de se poser la question des équations utiles du PFS. Elles le sont toutes.
- On ne peut pas dire au départ que  $A = B$  même si cela paraît évident. Ne pas supputer à l'avance...



TRS / $\vec{x}$  :  $-A \cos\varphi + B \cos\varphi = 0 \Rightarrow A = B$

TRS / $\vec{y}$  :  $A \sin\varphi + B \sin\varphi - P = 0 \Rightarrow A = B = \frac{P}{2 \sin\varphi}$

TMS en B par exemple :

$M_{(B, \vec{B}_{5 \rightarrow 2})} + M_{(B, \vec{A}_{5 \rightarrow 3})} + M_{(B, \vec{D}_{pes \rightarrow E})} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} + \overline{BA} \wedge (-A \cos\varphi \vec{x} + A \sin\varphi \vec{y}) + \overline{BD} \wedge (-P \vec{y}) = \vec{0}$

$(-a\vec{x} + h\vec{y}) \wedge (-A \cos\varphi \vec{x} + A \sin\varphi \vec{y}) + \left( \left(x - \frac{a}{2}\right) \vec{x} + \lambda \vec{y} \right) \wedge (-P \vec{y}) = \vec{0}$

$\left( A(h \cos\varphi - a \sin\varphi) - \left(x - \frac{a}{2}\right) P \right) \vec{z} = \vec{0} \Rightarrow x = \frac{h}{2 \tan\varphi} = \frac{h}{2 f}$

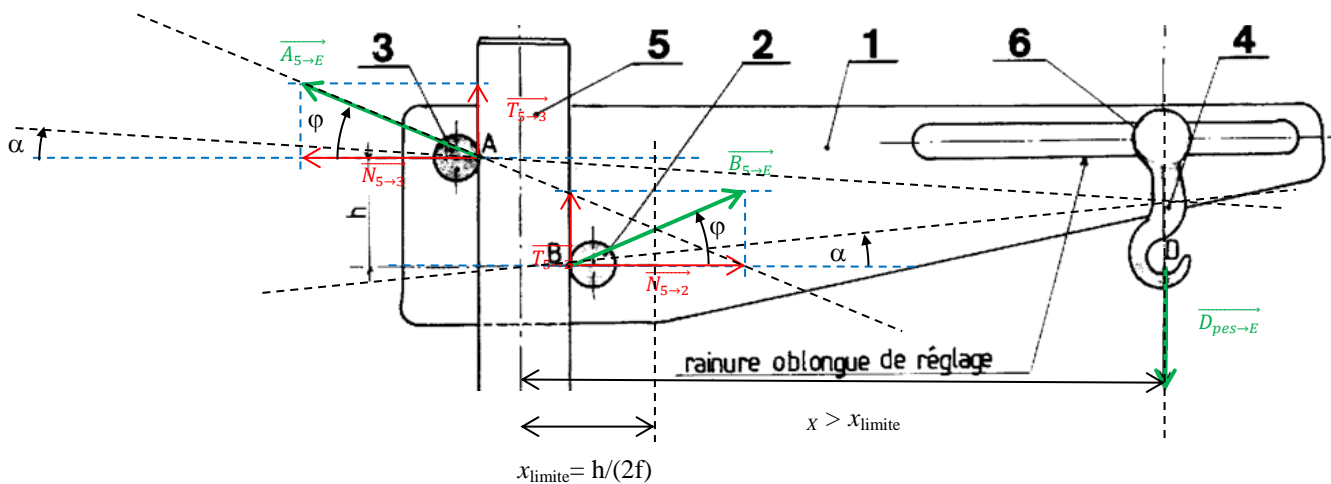
La condition sur  $x$  est indépendante de la charge P, il s'agit bien du phénomène d'arc-boutement.

Interprétation graphique : L'ensemble E est soumis à 3 glisseurs. Le TMS nous dit qu'ils sont concourants.

Pour un  $x > \frac{h}{2 f}$  (cas du dessin proposé), l'inclinaison  $\alpha$  de chacune des actions résultantes en A et B est

inférieure à l'angle de frottement. Il y a donc adhérence.  $\frac{h}{2 f}$  est donc la valeur minimale de  $x$  pour qu'il y ait arc-boutement (blocage de la liaison glissière).

Pour ceux qui ont manipulé sur la cordeuse de raquette en Tp, on utilise l'arc-boutement dans le système de pinces qui bloquent la corde une fois la tension de celle-ci atteinte par le tensionneur.



### Exercice 12 : roue libre

Petit exercice d'interprétation graphique sur un système soumis à 2 glisseurs.

On néglige l'action de pesanteur.

Si (1) tourne dans le sens horaire, on peut supposer que (3) n'est soumis qu'à deux glisseurs (deux forces). Les actions de contact (ponctuelles en A et B).

Le TMS précise que ces deux forces ont même support, la droite qui passe par les points d'application des forces. La droite (AB). On se place à la limite de glissement, lorsque l'inclinaison avec les normales aux contact est l'angle de frottement  $\varphi$ .

Triangle isocèle ABC :  $\pi - \theta + \varphi + \varphi = \pi$  d'où  $\varphi = \frac{\theta}{2}$

Triangle rectangle OCD :  $\cos\theta = \frac{H+r}{R-r}$

D'où la condition d'arc-boutement :  $\cos(2\varphi) = \frac{H+r}{R-r}$  **condition**

indépendante des modules d'efforts. c'est bien de l'arc-boutement.

