

Problème 1 : Vérification de performances d'un hélicoptère

$$Q1 : \overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}} = f_x(r) \cdot dS \cdot \overrightarrow{x_r} + f_z(r) \cdot dS \cdot \vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr$$

$$Q2 : \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale}} = \int \overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}} = \int_{r=0}^R \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \omega^2 \cdot l \cdot \int_{r=0}^R r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \omega^2 \cdot l \cdot \frac{R^3}{3} = A \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r})$$

$$D'où : A = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot l \cdot R^3$$

Q3 : Comme les pales possèdent le même angle d'incidence, les normes des composantes de portance et de traînée sont identiques sur chacune. Par contre, par la symétrie axiale, les traînées s'annulent.

On a alors :

$$\overrightarrow{R_{air \rightarrow rp}} = \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale1}} + \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale2}} = 2 \cdot A \cdot C_z(\alpha) \vec{z}$$

Q4 : à la limite du décollage, l'appareil est en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Soumis notamment aux actions de la pesanteur et de l'air, on peut alors écrire :

$$\overrightarrow{R_{air \rightarrow hélico}} + \overrightarrow{R_{pes \rightarrow hélico}} = \vec{0} \Rightarrow 2 \cdot A \cdot C_z(\alpha) = M_{totale} \cdot g$$

On en déduit :

$$M_{transportable} = \frac{2 \cdot A \cdot C_z(\alpha)}{g} - M_{vide}$$

Q5 : avec le coeff de sécurité :

$$M_{transportable \text{ réelle}} = \frac{1}{s} \left(\frac{2 \cdot A \cdot C_z(\alpha)}{g} - M_{vide} \right)$$

$$Q6 : \text{Changement de point : } \overrightarrow{V_{P \in pale/cabine}} = \overrightarrow{V_{O \in pale/cabine}} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{pale/cabine}} = -r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x_r}$$

$$Q7 : \text{composition du mouvement : } \overrightarrow{V_{P \in air/pale}} = \overrightarrow{V_{P \in air/sol}} + \overrightarrow{V_{P \in sol/cabine}} + \overrightarrow{V_{P \in cabine/pale}}$$

Or $\overrightarrow{V_{P \in air/sol}} = \vec{0}$ car pas de vent et $\overrightarrow{V_{P \in sol/cabine}} = \vec{0}$ car limite décollage.

$$D'où \overrightarrow{V_{P \in air/pale}} = -\overrightarrow{V_{P \in pale/cabine}} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x_r}$$

Q8 : On veut : $\|\overrightarrow{V_{P \in air/pale}}\| < 0,6 \cdot c$. Le cas le plus défavorable est pour P situé en bout de pale : $r = R$

$$D'où $r \cdot \omega < 0,6 \cdot c \Rightarrow \omega_{max} = \frac{0,6 \cdot c}{R}$$$

Q9 : Graphiquement : $C_z(\alpha)_{max} = 1.65$

$$Q10 : M_{transportable \text{ réelle}} = \frac{1}{s} \left(\frac{\rho \cdot (0,6 \cdot c)^2 \cdot l \cdot R \cdot C_z(\alpha)_{max}}{3 \cdot g} - M_{vide} \right) = 407.5 \text{ kg} > 400 \text{ kg}$$

le cahier des charges est vérifié.

$$Q11 : \overrightarrow{dM_{O,air \rightarrow pale}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}} = \overrightarrow{OP} \wedge \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (-C_x(\alpha) \vec{z} + C_z(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr$$

$$Q12 : \overrightarrow{M_{O,air \rightarrow pale}} = \int \overrightarrow{dM_{O,air \rightarrow pale}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (-C_x(\alpha) \vec{z} + C_z(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \omega^2 \cdot l = \frac{3 \cdot R}{4} A \cdot (C_z(\alpha) \overrightarrow{x_r} - C_x(\alpha) \vec{z})$$

Q13 : raisonnement analogue à Q3 : $\overrightarrow{M_{O,air \rightarrow rp}} = \overrightarrow{M_{O,air \rightarrow pale1}} + \overrightarrow{M_{O,air \rightarrow pale2}} = -\frac{3.R}{2} A. C_x(\alpha) \vec{z}$

Q14 : Ce résultat indique que l'action de l'air sur le rotor principal va appliquer à la cabine une rotation autour de l'axe (O, \vec{z}) , c'est-à-dire l'axe du rotor principal. Cet effet est bien évidemment fort gênant !

Q15 : $\|\overrightarrow{R_{air \rightarrow rac}}\| = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \omega_{ac}^2 \cdot l_{ac} \cdot R_{ac}^3 \cdot C_z(\alpha_{ac})$

Q16 : La résultante précédente est colinéaire à \vec{y} , donc le bras de levier permettant de connaître son effet en O est la longueur de queue, d_{ac} , plus courte distance entre O et le support de $\overrightarrow{R_{air \rightarrow rac}}$. On écrit donc :

$$\|\overrightarrow{M_{(O, R_{air \rightarrow rac})}}\| = \|\overrightarrow{R_{air \rightarrow rac}}\| \cdot d_{ac}$$

Q17 : Pour que le rotor anti-couple puisse compenser le couple indésirable créé par l'air sur le rotor principal, il faut qu'il y ait équilibre de l'hélicoptère sous l'action de ces deux moments. Cela entraîne :

$$-\frac{3.R}{2} A. C_x(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \omega_{ac}^2 \cdot l_{ac} \cdot R_{ac}^3 \cdot C_z(\alpha_{ac}) \cdot d_{ac}$$

d'où

$$d_{ac} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{l}{l_{ac}} \cdot \frac{R^4}{R_{ac}^3} \cdot \frac{C_x(\alpha)}{C_z(\alpha_{ac})}$$

Q18 : $d_{ac} = 5.76$ m. Cette valeur est conforme au choix fait par le constructeur car, en prenant une longueur de queue de 6m, celui-ci s'assure que le cas limite décrit n'est pas atteint.

Problème 2 : Doseur pondéral de granules plastiques (extrait Mines MP 08)

Q1 On suppose que les poids des éléments constitutifs du capteur sont négligés par rapport aux autres actions mécaniques exercées.

- Isolons $S=\{5\}$: soumis à 2 glisseurs donc ils ont même support (CD) soit $\boxed{D_Y=C_Y=0}$
- Isolons $S=\{8\}$: soumis à 3 actions mécaniques en B, C et K donc le théorème de la résultante statique sur \vec{y} donne : $-B_Y - C_Y - P = 0$ soit $\boxed{B_Y = -P}$
- Isolons $S=\{4\}$: soumis à 2 actions mécaniques en B et A donc le théorème du moment statique en A selon \vec{z} donne : $C_{eA} + l \cdot B_Y = 0$ soit $\boxed{P = C_{eA} / l}$

Q2

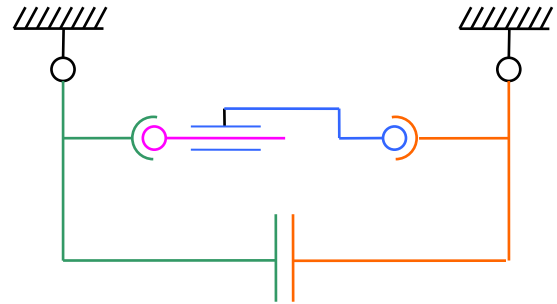
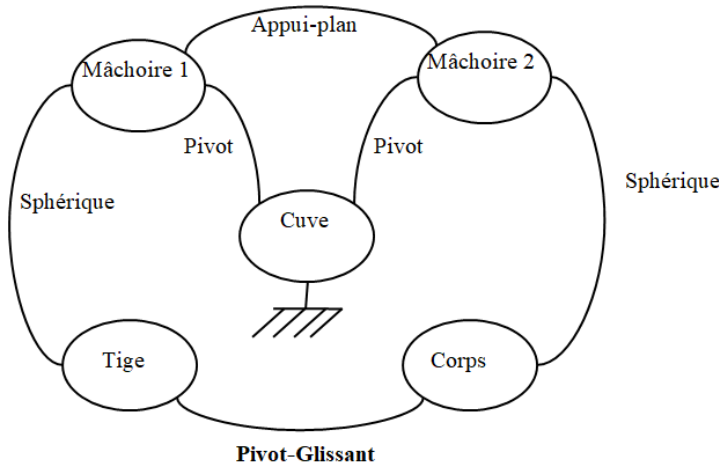
- Isolons $S=\{4\}$: soumis à 2 actions mécaniques donc le théorème du moment statique en A selon \vec{z} donne : $2 \cdot C_e + l \cdot B_Y = 0$
- Isolons $S=\{5\}$: soumis à 2 actions mécaniques donc le théorème du moment statique en D selon \vec{z} donne : $2 \cdot C_e + l \cdot C_Y = 0$
- Isolons $S=\{8\}$: soumis à 3 actions mécaniques donc le théorème de la résultante statique en \vec{y} donne : $-B_Y - C_Y - P = 0$

D'où : $\boxed{P = 4 \cdot C_e / l}$

Conclusion : la mesure du poids est donc indépendante de M_k et donc de la position du centre de gravité des granulés.

Q3 Le graphe des liaisons est le suivant :

Le schéma cinématique plan :



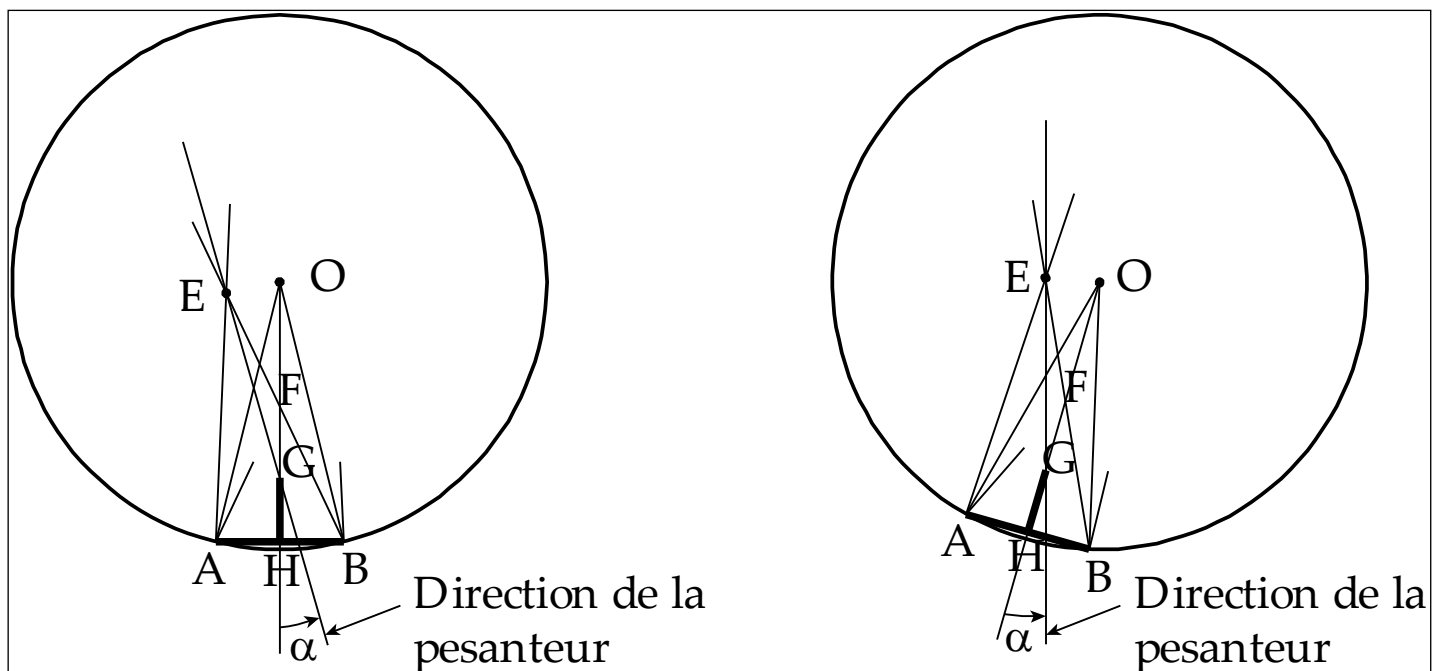
Problème 3 : Robot de pose de fibre optique (extrait Mines MP 04)

Le contact entre le robot et la canalisation est modélisé par deux contacts ponctuels avec frottement en A et B. Les normales au contact ont pour vecteur directeur respectif \vec{AO} et \vec{BO} . D'autre part, le robot est soumis aux actions de la pesanteur (centre de gravité G).

Le système est donc soumis à trois glisseurs. Les conditions nécessaires d'équilibre imposent la concourance de ces trois glisseurs en un même point et leur somme nulle.

En A et B, on trace les cônes de frottement. La zone d'intersection des cônes représente la zone de concours possible des glisseurs.

Afin de déterminer la configuration limite, on se place à la limite du glissement. Les glisseurs associés aux contacts ponctuels appartiennent à l'enveloppe de leur cône respectif. D'autre part, il est à noter que les actions tangentielles sont dirigées dans le même sens.



Le point obtenu (voir figure) représente le point de concours des glisseurs dans la configuration limite. Il ne reste plus qu'à mesurer l'angle entre le robot et la verticale.

$$\alpha_{\max i} = 16^\circ$$

Le cahier des charges est respecté. L'inclinaison reste inférieure à 20° .

Remarques :

- Lorsque la distance HG croît, l'angle $\alpha_{\max i}$ augmente dans la mesure où $HG \leq HF$ (avec F le point d'intersection de (BE) et (HO)). Au-delà, l'action de la pesanteur risque de faire basculer le chariot, l'angle $\alpha_{\max i}$ diminue.

- Lorsque l'angle φ du cône de frottement croît, l'angle d'inclinaison du chariot $\alpha_{\max i}$ augmente.

Problème 4 : Chargement/déchargement de cargos porte-conteneurs (extrait Centrale PSI 13)

Q1 : Soit $S = \{\text{Portique} + \text{Chariot} + \text{Spreader} + \text{Conteneur}\}$

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- Poids ($M_c + M_s$ en G_3 , M_{ch} en G_{ch} et M_p en G_p)
- Action du rail en A : glisseur en A
- Action du rail en B : glisseur en B

S'il y a basculement, il aura lieu lors du début de la phase de levage de la charge maxi (portique et chariot immobiles). On applique le TMS. en A selon la direction \vec{x} .

$$\begin{aligned} \vec{M}_A(\text{poids}/Rg). \vec{x} &= -[\overrightarrow{AG_3} \wedge (M_c + M_s).g.\vec{z} + \overrightarrow{AG_{ch}} \wedge M_{ch}.g.\vec{z} + \overrightarrow{AG_p} \wedge M_p.g.\vec{z}]. \vec{x} \\ \Rightarrow \vec{M}_A(\text{poids}/Rg). \vec{x} &= \left[(M_c + M_s).D + M_{ch}.D - M_p.\frac{l_y}{2} \right].g \\ \vec{M}_A(\vec{A}/Rg). \vec{x} &= 0 \\ \vec{M}_A(\vec{B}/Rg). \vec{x} &= \overrightarrow{AB} \wedge Z_B \vec{z}. \vec{x} = l_y.Z_B \end{aligned}$$

Ainsi on obtient l'équation suivante :

$$0 = \left[(M_c + M_s).D + M_{ch}.D - M_p.\frac{l_y}{2} \right].g + l_y.Z_B$$

$$\text{Soit } Z_B = \frac{(M_p.\frac{l_y}{2} - (M_c + M_s).D - M_{ch}.D).g}{l_y} = 3347 \text{ kN}$$

$$\text{TRS} \Rightarrow Z_A = (M_p + M_c + M_s + M_{ch}.)g - Z_B = 8223 \text{ kN}$$

Le non basculement de la grue consiste à considérer $Z_B \geq 0$. Elle est donc vérifiée

Q1 bis : Dans le cas de la levée de la charge maxi à l'accélération maxi : à l'action de la pesanteur sur le conteneur et le spreader s'ajoute les effets dynamiques $(M_c + M_s). \gamma_{lm}$ (c'est le PFD). Cette force d'inertie contribue au basculement (s'il a lieu) du portique.

D'où $0 = \left[(M_c + M_s).D + M_{ch}.D - M_p.\frac{l_y}{2} \right].g + l_y.Z_B + (M_c + M_s).D.\gamma_{lm}$ cette équation est le TMS appliqué en A à l'ensemble S1-S. $(M_c + M_s). \gamma_{lm}$ est la tension supplémentaire dans les câbles de levage.

D'où $Z_B = \frac{1}{l_y} (M_p.\frac{l_y}{2}.g - (M_c + M_s).D.(g + \gamma_{lm}) - M_{ch}.D.g) = 3216 \text{ kN} > 0$. Il ya toujours non basculement.

L'accélération maxi conduisant au basculement est : $\gamma_{lm} = g \left[\frac{-M_{ch}.D + M_p.\frac{l_y}{2}}{(M_c + M_s).D} - 1 \right] = 24.7 \text{ m/s}^2 \gg 0.5 \text{ m/s}^2$

Q2 :

Par hypothèse :

- Tous les éléments sont immobiles
- Les masses des poutres supérieures, inférieures et des supports de galets sont négligeables devant M_p .
- Le problème est supposé plan (\vec{x}, \vec{z}) .

Ainsi on se place dans le cadre d'une étude de statique :

- Système isolé : {portique + poutres inf & sup + supports de galets + galets + chariot + spreader + conteneur}
- Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :
 - Poids : $M_c + M_s$ en G_3 ; M_{ch} en G_{ch} et M_p en G_p
 - Action du rail en A : ponctuelle de normale (A, \vec{z}) avec frottement $(Z_{fA}\vec{z} - X_{fA}\vec{x})$
 - Action du rail en D : ponctuelle de normale (D, \vec{z}) avec frottement $(Z_{fD}\vec{z} - X_{fD}\vec{x})$
 - Force du vent en K : $\vec{F}_V = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot V^2 \cdot \vec{x}$
- Théorème du moment statique en A projeté sur \vec{y} permet de déterminer Z_{fD} :

$$-\left[\overrightarrow{AG_3} \wedge (M_c + M_s) \cdot g \cdot \vec{z} + \overrightarrow{AG_{ch}} \wedge M_{ch} \cdot g \cdot \vec{z} + \overrightarrow{AG_p} \wedge M_p \cdot g \cdot \vec{z}\right] \cdot \vec{y} + \overrightarrow{AK} \wedge \vec{F}_V \cdot \vec{x} + \overrightarrow{AD} \wedge (Z_{fD}\vec{z} + X_{fD}\vec{x}) \cdot \vec{y}$$

$$\overrightarrow{AD} = -l_x \vec{x} ; \overrightarrow{AG_3} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + ??? \vec{z} ; \overrightarrow{AG_{ch}} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + ??? \vec{z} ; \overrightarrow{AG_p} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + h \vec{z} ; \overrightarrow{AK} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + H \vec{z}$$

Toutes les dimensions selon \vec{z} n'intervenant pas dans le résultat final, il importe peu que certaines ne soient pas définies. Ainsi nous obtenons l'équation suivante :

$$-(M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g \cdot \frac{l_x}{2} + H \cdot F_V + l_x \cdot Z_{fD} = 0$$

$$\text{On en déduit alors } Z_{fD} = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g - H \cdot \frac{F_V}{l_x}$$

- Théorème de la résultante statique selon \vec{z} :

$$Z_{fA} + Z_{fD} - (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g = 0 \quad \text{Soit : } Z_{fA} = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g + H \cdot \frac{F_V}{l_x}$$

Q3 :

- Il y a basculement ssi, $Z_{fD} = 0 = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g - H \cdot \frac{F_V}{l_x}$, car d'après le sens du vent le basculement s'effectuera autour de A.

Soit la vitesse du vent minimale causant le basculement :

$$V^2 = \frac{l_x \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g}{H \cdot \lambda} \Rightarrow V = 312 \text{ km/h } (> 300 \text{ km/h Cdcf})$$

NB : En observant l'équation de Z_{fD} on peut remarquer que le cas le plus défavorable est celui sans conteneur. Dans ce cas la vitesse du vent vaudra :

$$V = 307 \text{ km/h } (> 300 \text{ km/h Cdcf})$$

- Pour étudier le glissement on se place à l'équilibre à la limite du glissement : $X_{fA} = f \cdot Z_{fA}$

D'après le Th. de la résultante selon \vec{x} on trouve :

$$-X_{fA} - X_{fD} + F_V = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot V^2 - f \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g = 0$$

Comme précédemment, on peut remarquer que le cas le plus défavorable est celui sans conteneur. Dans ce cas la vitesse du vent vaudra :

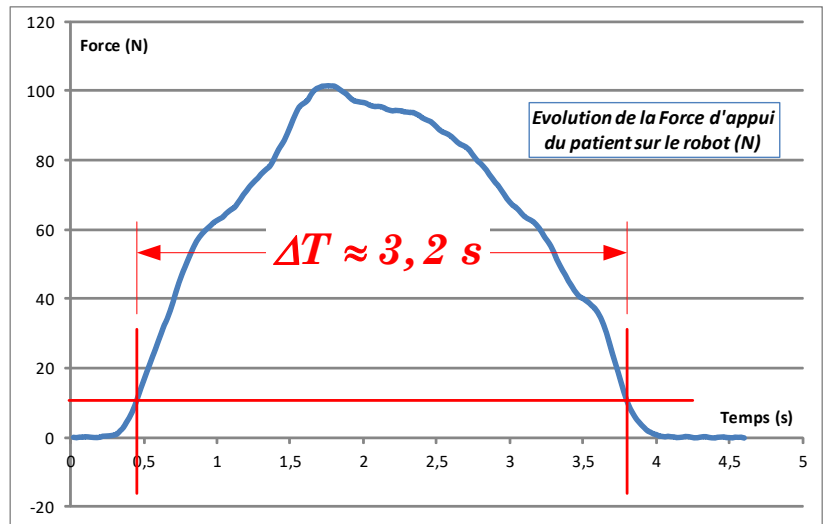
$$V_2^2 = \frac{2}{\lambda} \cdot f \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g \text{ soit } V_2 = 266 \text{ km/h } (> 120 \text{ km/h Cdcf})$$

Le cahier des charges n'est pas respecté. Il existe un risque de glissement en cas de vent violent mais pas de basculement. Il faudra donc prévoir un système de blocage des roues.

Problème 5 : Robot Romeo (extrait e3A MP 14)

Q1 : Pour réaliser ces essais, il n'est pas nécessaire d'avoir une grande précision. Ces mesures ont pour seul but d'avoir une idée de l'effort que peut exercer une personne âgée. L'effort maximum toléré sur le cahier des charges est de 100N. Un capteur avec une étendue de 150N et une précision de ± 5 N suffit par exemple.

Q2 : Le temps de maintien est d'environ 3,3 secondes. Le cahier des charges précise qu'on peut attendre un temps de maintien jusqu'à 10 s. Le cahier des charges est donc cohérent au regard de cet enregistrement, avec une prise de sécurité importante.



Q3 : C'est le pied droit qui est susceptible de décoller : l'appui de la personne crée un moment de basculement sur le pied gauche.

Q4 :

$$\mathcal{T}\{\text{pes} \rightarrow E\} = \begin{Bmatrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \quad \mathcal{T}\{\text{hum} \rightarrow E\} = \begin{Bmatrix} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D \quad \mathcal{T}\{\text{solD} \rightarrow E\} = \begin{Bmatrix} Z'_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_D}$$

$$\mathcal{T}\{\text{solG} \rightarrow E\} = \begin{Bmatrix} Z'_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_G}$$

Q5 : En isolant (E) en équilibre dans le référentiel galiléen du sol, le principe fondamental de la statique s'applique.

L'équation de résultante suivant \vec{z}_0 donne :

$$-F - M \cdot g + Z_{01} + Z'_{01} = 0$$

Q6 : L'équation du moment en O_D suivant \vec{x}_0 s'écrit :

$$-M \cdot g \cdot d - F \cdot (e + d) + Z'_{01} \cdot 2d = 0$$

Ainsi :

$$Z'_{01} = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (e + d)}{2d}$$

Q7 : En injectant ce résultat dans l'équation issue du TRS :

$$Z_{01} = F + M \cdot g - Z'_{01} = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d - e)}{2d}$$

Finalement :

$$\mathcal{T}\{\text{solG} \rightarrow E\} = \begin{Bmatrix} F \left(\frac{d+e}{2d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_G} \quad \mathcal{T}\{\text{solD} \rightarrow E\} = \begin{Bmatrix} F \left(\frac{d-e}{2d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_D}$$

Q8 : D'après son expression, Z'_{01} reste forcément positif (cohérent avec Q4) donc la condition est :

$$Z_{01} \geq 0$$

soit :

$$F \left(\frac{d-e}{2 \cdot d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \geq 0$$

Q9 : En exerçant l'effort au point D , le basculement ferait perdre le contact au point O_D , d'où $Z_{01} = 0$

$$0 = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d-e)}{2d} \Rightarrow F = -\frac{M \cdot g \cdot d}{d-e}$$

L'application numérique nous donne :

$$F = 900\text{N} > 100\text{N}$$

Le cahier des charges stipule un effort maximum de 100N, la condition de non-basculement n'est donc pas limitante au vu de ce critère.

Q10 : On isole donc $E_{12} = \{1, 2\}$, cet ensemble est soumis à 4 actions mécaniques extérieures :

- le poids représentable par un glisseur en G_{12} , $\vec{P}_{12} = -M_{12} \cdot \vec{g} \cdot \vec{z}_0$,
- l'effort du patient représentable par un glisseur en D , $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$,
- le couple moteur C_{32} au niveau du genou,
- l'action de la liaison pivot d'axe (B, \vec{y}_0) de 3 sur 2 modélisable par un glisseur au vue de l'hypothèse de problème plan $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$.

Afin de s'abstenir de calculer les inconnues de liaison de 3 sur 2, il suffit d'appliquer le théorème du moment suivant l'axe (B, \vec{y}_0)

$$-l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot M_{12} \cdot g - l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot F + C_{32} + 0 = 0$$

D'où :

$$C_{32} = l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot (F + M_{12} \cdot g)$$

Résolution avec Torseur (c'est la même chose mais présentée différemment)

Bilan des efforts extérieurs qui s'appliquent sur l'ensemble isolé $E_{12} = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} T\{\text{patient} \rightarrow 1\} &= \left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D & T\{\text{poids} \rightarrow E_{12}\} &= \left\{ \begin{array}{c} -M_{12} \cdot \vec{g} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_{12}} \\ T\{\text{moteur} \rightarrow 2\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{32} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B & T\{3 \rightarrow 2\} &= \left\{ \begin{array}{c} X_{32} \cdot \vec{x}_0 + Z_{32} \cdot \vec{z}_0 \\ 0 \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B \end{aligned} \quad (\text{Torseur des efforts transmissibles de la liaison pivot, exprimé dans le plan sagittal.})$$

Puisqu'on cherche à déterminer le couple C_{32} , on va utiliser le théorème du moment statique au point B :

$$\begin{aligned} \vec{M}(B, \text{patient} \rightarrow 1) &= \vec{M}(D, \text{patient} \rightarrow 1) + \overrightarrow{BD} \wedge -F \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -l_3 \cdot \vec{z}_3 + (Z_D - l_4) \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BD} \wedge -F \cdot \vec{z}_0 &= (-l_3 \cdot \vec{z}_3 + (Z_D - l_4) \cdot \vec{z}_0) \wedge -F \cdot \vec{z}_0 = -F(l_3 \cdot \sin \theta_{43}) \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}(B, \text{patient} \rightarrow 1) = -F(l_3 \cdot \sin \theta_{43}) \vec{y}_0$$

$$\begin{aligned} \vec{M}(B, \text{poids} \rightarrow 1) &= \vec{M}(G_{12}, \text{poids} \rightarrow 1) + \overrightarrow{BG_{12}} \wedge -M_{12} \cdot \vec{g} \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BG_{12}} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_{12}} = -l_3 \cdot \vec{z}_3 + Z_{G_{12}} \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BG_{12}} \wedge -F \cdot \vec{z}_0 &= (-l_3 \cdot \vec{z}_3 + Z_{G_{12}} \cdot \vec{z}_0) \wedge -M_{12} \cdot \vec{g} \cdot \vec{z}_0 = M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}(B, \text{poids} \rightarrow 1) = M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot \vec{y}_0$$

D'où l'équation de moment :

$$C_{32} + M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin\theta_{43} + F(l_3 \cdot \sin\theta_{43}) = 0$$

$$C_{32} = -(M_{12} \cdot g + F) \cdot (l_3 \cdot \sin\theta_{43})$$

$$\text{A.N. : } C_{32} = 83,4 \text{ N}$$

Q11 : Puisque le rendement du réducteur est égal à 1, on a :

$$C_{32} \cdot \omega_{32} = C_m \cdot \omega_m \Rightarrow C_m = C_{32}/r_{32} = 0,88 \text{ Nm} < 2,5 \text{ Nm}$$

Le moteur est donc en mesure de rester en position de genuflexion pendant que le patient est en appui sur l'épaule du robot.

Il faudra cependant prendre garde que cette position ne perdure pas trop dans le temps au risque d'un échauffement exagéré des bobinages du moteur.

Q12 :

$$d(t) : \text{tension moteur en } V$$

$$e(t) : \text{courant moteur en } A$$

$$f(t) : \text{couple moteur en } N \cdot m$$

$$g(t) : \text{vitesse moteur en } rad \cdot s^{-1}$$

Q13 :

$$\theta_{32}(p) = \frac{1}{r_{32} \cdot J \cdot p^2} \cdot (F(p) - C_r(p)) \quad (1)$$

$$F(p) = \frac{K_m}{R} \cdot (D(p) - K_m \cdot G(p)) = \frac{K_m}{R} \cdot (D(p) - K_m \cdot r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)) \quad (2)$$

$$D(p) = K_3 \cdot (B(p) - E(p)) = K_3 \cdot \left(B(p) - \frac{F(p)}{K_m} \right) \quad (3)$$

Q14 :

$$B(p) = K_2 \cdot (A(p) - G(p)) = K_2 \cdot (A(p) - r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)) \quad (4)$$

$$A(p) = K_1 \cdot (\theta_{32c}(p) - \theta_{32}(p)) \quad (5)$$

Q15 : $\theta_{32p}(t)$ représente la variation de position angulaire réelle du genou sous l'action uniquement de la perturbation, relativement à une position initiale de référence θ_{32-0}

$$A(p) = -K_1 \cdot \theta_{32p}(p) \quad (5)$$

$$\text{Q16 : } B(p) = K_2 \cdot \left(-K_1 \cdot \theta_{32p}(p) - r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32p}(p) \right) = (-K_1 \cdot K_2 - r_{32} \cdot K_2 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) \quad (6)$$

$$\text{Q17 : } D(p) = K_3 \cdot \left((-K_1 \cdot K_2 - r_{32} \cdot K_2 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{F(p)}{K_m} \right)$$

$$D(p) = (-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 - r_{32} \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{K_3}{K_m} \cdot F(p) \quad (7)$$

$$\text{Q18 : } F(p) = \frac{K_m}{R} \cdot [(-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 - r_{32} \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{K_3}{K_m} \cdot F(p) - K_m \cdot r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)]$$

$$F(p) \cdot \left(1 + \frac{K_3}{R} \right) = \frac{1}{R} \cdot [-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m - r_{32} \cdot K_m \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m) \cdot p] \cdot \theta_{32p}(p)$$

$$F(p) = \frac{1}{K_3 + R} \cdot [-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m - r_{32} \cdot K_m \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m) \cdot p] \cdot \theta_{32p}(p) \quad (8)$$

Q19 :

$$\theta_{32p}(p) = \frac{1}{r_{32} \cdot J \cdot p^2} \cdot (F(p) - C_r(p))$$

En remplaçant l'expression de $F(p)$ trouvée :

$$\theta_{32p}(p) = \frac{\left(-\frac{K_3 + R}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m}\right)}{1 + \frac{r_{32} \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3} \cdot p + \frac{r_{32} \cdot J \cdot (K_3 + R)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m} \cdot p^2} C_{rp}(p)$$

$$\alpha = \left(-\frac{K_3 + R}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m}\right) \quad \beta = \frac{r_{32} \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3} \quad \gamma = \frac{r_{32} \cdot J \cdot (K_3 + R)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m}$$

Q20 : $\alpha = -1,69 \cdot 10^{-3} \text{ rad}/(\text{Nm})$

Q21 :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = 2,25 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{2 \cdot z}{\omega_0} = 0,960$$

Ainsi :

$$z = \frac{1}{2} \cdot 0,960 \cdot \sqrt{\frac{1}{2,25 \cdot 10^{-6}}} = 320$$

Le système est donc très amorti vis-à-vis d'une sollicitation en effort d'un patient. Il n'y aura pas de dépassement ($z > 1$), c'est donc conforme au cahier des charges qui demandait un dépassement inférieur de 5%.

Q22 : $\delta\theta_{32} = \alpha \cdot C_{r0}$ avec $C_{r0} = -1 \text{ Nm}$
 $\delta\theta_{32} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,1^\circ$

Q23 : Si on considère toutes les autres articulations bloquées, le point B reste immobile et l'inclinaison de la cuisse par rapport à la verticale augmente très légèrement de $0,1^\circ$.

Ainsi :

$$\delta Z_C = l_2 \cdot (\cos 63 - \cos 63,1) = -0,48 \text{ mm} < 5 \text{ mm}$$

Si on veut éventuellement annuler cette erreur qui est tout de même très petite vis-à-vis du cahier des charges, il suffit par exemple d'ajouter une action intégrale dans la correction. Il faudrait vérifier la stabilité du système pour que ce soit compatible.

Q24 :

$$\ddot{\theta}_m(t) = -\frac{8 \cdot \omega_0}{t_1^2} \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)$$

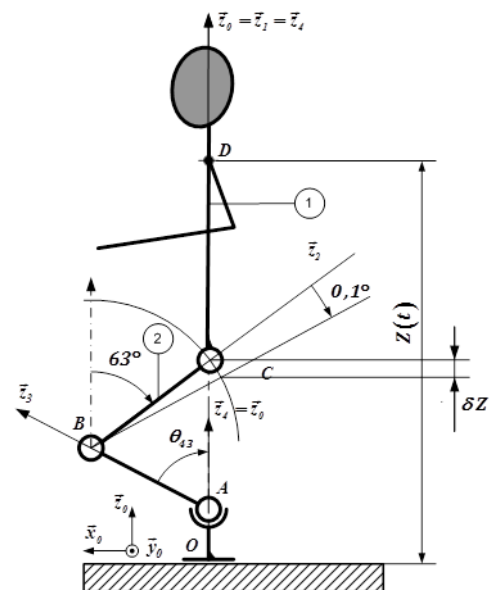
$$\ddot{\theta}_{\text{MAX}} = \frac{8 \cdot |\omega_0|}{t_1^2} \cdot \frac{t_1}{2} = \frac{4 \cdot |\omega_0|}{t_1}$$

Q25 :

$$\theta_m = -\frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)^3 + \omega_0 \cdot t + c$$

$$\theta_m(t=0) = 0 = \frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \frac{t_1^3}{8} + c$$

$$c = -\frac{\omega_0 \cdot t_1}{6}$$



$$\Delta\theta_m = -\frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \left(t_1 - \frac{t_1}{2}\right)^3 + \omega_0 \cdot t_1 - \frac{\omega_0 \cdot t_1}{6} = \frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t_1}{3}$$

Q26 :
$$r_{32} = \frac{\theta_m}{\theta_{32}} = \frac{\Delta\theta_m}{\Delta\theta_{32}}$$

Ainsi :

$$\omega_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{r_{32}}{t_1} \cdot \Delta\theta_{32}$$

Q27 :

$$\Omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 95 \text{ tr/min} < 7000 \text{ tr/min}$$

Q28 : L'accélération angulaire maximale du moteur est

$$\ddot{\theta}_{\text{Max}} = \frac{4 \cdot |\omega_0|}{t_1} = \frac{4 \times 10}{10} = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

Et au niveau de l'articulation

$$\ddot{\theta}_{32\text{Maxi}} = 4/95,91 = 0,042 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

Q29 : Il faut isoler le solide 1 (on utilise alors le principe des actions réciproques $C_{12} = -C_{21}$) et écrire le TMS en C projeté sur \vec{y}_0 .

Q30 : Bilan des moments en C suivant \vec{y}_0 :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\text{C, patient} \rightarrow 1) \cdot \vec{y}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}}(\text{C, pes} \rightarrow 1) \cdot \vec{y}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}}(\text{C, 2} \rightarrow 1) \cdot \vec{y}_0$$

Ainsi :

$$= (F + M_1 \cdot g) \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} + C_{21}$$

Q31 : On a $C_{21} = -M_1 \cdot l_1 \cdot \ddot{Z}_D \cdot \sin \theta_{10} - (F + M_1 \cdot g) \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10}$

D'où $M_1 \cdot \dot{Z}_D \cdot \ddot{Z}_D = -(M_1 \cdot g + F) \cdot \dot{Z}_D + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot (F + M_1 \cdot (g + \dot{Z}_D)) \cdot \dot{\theta}_{21} - C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32}$

Q32 : En simplifiant par \dot{Z}_D : $M_1 \cdot \ddot{Z}_D = -(M_1 \cdot g + F) + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot (F + M_1 \cdot g + M_1 \cdot \dot{Z}_D) \cdot 2,5 + C_{32} \cdot 5$

Enfin :

$$\ddot{Z}_D = -\frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}$$

D'où : $M_1 \cdot \left(-\frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}\right) = -(M_1 \cdot g + F) + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot \left(F + M_1 \cdot g - M_1 \cdot \frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}\right) \cdot 2,5 + C_{32} \cdot 5$

$$C_{32} = \frac{1}{5} \cdot (F + M_1 \cdot g) \cdot (1 - 2,5 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10}) + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} - \frac{M_1}{5}\right) \cdot \ddot{\theta}_{32}$$

D'où :

$$A = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot M_1 - \frac{M_1}{5}\right) \text{ et } B = \frac{1}{5} \cdot (F + M_1 \cdot g) \cdot (1 - 2,5 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10})$$

Q33 :

$$C_{32} = 55 \text{ Nm}$$

D'où, si on suppose un rendement de 1 :

$$C_m = \frac{C_{32}}{r_{32}} = 0,57 \text{ Nm} < 2500 \text{ mNm}$$

Le couple de démarrage est 2500 mN.m ce qui est largement suffisant pour le scénario envisagé.

On remarque que les effets dynamiques sont négligeables par rapport aux efforts.