MPSI

Programme de colle - semaine 30 du 10/06/2024 au 16/06/2024 (dernière)

1 Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Les démonstrations à savoir sont marquées d'un (*)

- Produit scalaire dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Norme associée.
  Espace préhilbertien : $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$-EV et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E.
  Espace euclidien : espace préhilbertien de dimension finie.
- **Exemples au programme** : à connaître, y compris la justification du fait que ce sont des produits scalaires :
  Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.
  Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$: $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.
  Produit scalaire intégral dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ $(a < b)$: $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_a^b fg$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité (*). Inégalité triangulaire (*) et cas d'égalité.
- Orthogonalité. Orthogonal d'une partie de E : définition, c'est un SEV de E (*).
- Famille orthogonale, orthonormée. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (*). Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (à partir d'une famille libre, construire une famille orthonormée qui engendre le même SEV).
- Si F est un SEV de dimension finie de E, alors $E = F \oplus F^\perp$. Projection orthogonale sur un SEV de dimension finie. Expression à partir d'une base orthonormée de F.
  Si E est de dimension finie, alors $(F^\perp)^\perp = F$.
- Distance d'un élément à une partie non vide de E : définition.
  La distance de u à F (SEV de dimension finie) est atteinte en unique point : le projeté orthogonal de u sur F. (Ne pas hésiter à guider pour les questions de calcul d'inf).
- La notion d'isométrie n'est plus au programme en sup.
- Commencer par un exercice basique : reconnaissance d'un produit scalaire, recherche d'une base orthonormée d'un plan, inégalité obtenue à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2 Exercices faits

Il est bien sûr possible de changer légèrement les données, si ça n'alourdit pas les calculs.

1. Soit $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$ et $u_3 = (1,0,0)$.
   Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et l'orthonormaliser (pour le produit scalaire canonique).
   On n'est pas obligé de finir complètement les calculs

2. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$.
   Donner une base orthonormée de F, puis la matrice dans la base canonique de p, la projection orthogonale sur F.
   On n'est pas obligé de finir complètement les calculs

3. **CCINP exo 76**
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$.
   On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

   a) i) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ii) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \,/\, \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \,/\, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

4. **CCINP exo 81**

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}(A^\top A')$, où $\mathrm{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A'.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

d) Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.