Banque CCINP MP

0. **Liste d'exercices posables en sup**
   - 3 (Leibniz)
   - 4 (TAF, limite de la dérivée)
   - 5 (comparaison série-intégrale)
   - 6 (règle de D'Alembert : résultat vu et démontré en spé mais démontrable en sup)
   - 7 (équivalent, série)
   - 8 partiellement (question a, série alternée)
   - 33 (fonction de 2 variables)
   - 39 sauf question sur la continuité de φ (espace préhilbertien, série)
   - 42 (ED, recollement)
   - 43 (suite récurrente, continuité)
   - 46 (DL, série)
   - 52 (fonction de 2 variables, continuité)
   - 55 (EV, suite récurrente d'ordre 2)
   - 56 supprimé (intégrale, DL)
   - 57 sauf question sur "f différentiable" (fonction de 2 variables)
   - 59 sauf question sur "f diagonalisable" (polynôme, matrice d'application linéaire)
   - 60 (calcul matriciel, algèbre linéaire de base)
   - 62 sauf question "en utilisant le lemme des noyaux" (somme directe)
   - 63 partiellement (supprimé) (déterminant tridiagonal)
   - 64 (logique, algèbre linéaire)
   - 71 (somme directe, projection)
   - 73 (matrice, système) avec adaptation :

     En sup, remplacer la première question par "montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$".
   - 76 (Cauchy-Schwarz)
   - 77 (Orthogonalité, logique)
   - 79 (intégration, Cauchy-Schwarz)
   - 80 (produit scalaire, intégrale)
   - 81 (projection orthogonale, distance)
   - 82 (orthogonalité, distance)
   - 84 (racines de l'unité, trigonométrie complexe)
   - 85 (formule de Taylor polynomiale)
   - 86 (petit théorème de Fermat)
   - 87 (interpolation)
   - 89 (somme trigonométrique)
   - 90 (algèbre linéaire, interpolation)
   - 92 (produit scalaire matriciel)
   - 94 (congruences)
   - 95 (tirages avec/sans remise)
   - 98 (loi binomiale conditionnelle)
   - 99 (IBT)
   - 100 (séries rationnelles). Rajouter les précisions : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$, $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(X = n)$ et $\mathbf{E}(X^2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\mathbf{P}(X = n)$ sous réserve de convergence.
   - 101 avec adaptations (chaîne de Markov)
   - 104 (placement de boules dans des urnes)
   - 105 (dés pipés)
   - 107 (chaîne de Markov à 2 états)
   - 109 (suite finie de tirages)
   - 112 (dénombrement de parties)

1. a) On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

   b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1. On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   On pose : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

   a) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.

   b) Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

      i) Soit $u\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$

      Prouver que u est une application continue sur E.

      ii) On pose $F = \{f \in E \,/\, f(0) = 0\}$.

      Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

   c) Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.

   Soit $c\colon \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$

   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$.

      i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

      ii) On pose $F = \{F \in E \,/\, f(0) = 0\}$.

      On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.

      Prouver que $c \in \overline{F}$.

      F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

2. On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

   a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

   b) En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).

   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

   c) i) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

      On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

      Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

      ii) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

3. a) On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

b) On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n^{e} d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

c) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée pour la question précédente.

4. a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

b) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

c) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Rightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

5. a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) $\boxed{\text{Cas } \alpha \leqslant 0}$
En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

ii) $\boxed{\text{Cas } \alpha > 0}$
Étudier la nature de la série.
Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

b) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{\left(e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$

6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

a) Démontrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une série géométrique.

b) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

7. a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que :
$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

b) Étudier la convergence de la série
$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}$$

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

8. a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

   i) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   ii) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.

   b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   i) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$

   ii) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

9. a) Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

   b) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

   i) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

   ii) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

   iii) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

   iv) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

10. On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$

   a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

11. a) Soit X une partie de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

   i) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

   ii) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) puis sur $]0, +\infty[$.

12. a) Soit (f_n) une suites de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.

   b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

13. a) Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
Démontrer que la fonction g est bornée.

b) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

13. a) Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

b) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel est une partie fermée de cet espace.

c) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

d) On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définir pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de E par $\|P\|_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$.

i) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.

ii) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
$S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

14. a) Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas d'une série de fonctions.

c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

15. Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

b) Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X, est uniformément convergente sur X.

c) La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}^{*+}$?

16. On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$

a) Montrer que S est dérivable sur $[0,1]$.

b) Calculer $S'(1)$.

17. Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

a) Démontrer l'implication :

$$\text{(la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{(la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A)$$

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$? Justifier.

18. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

a) Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

b) i) Étudier la convergence normale puis la convergence uniforme de cette série sur D.
ii) La fonction S est-elle continue sur D ?

19. Exo supprimé

a) Prouver que pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Prouver que $f : t \longmapsto e^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n!)}$.
Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

19. a) i) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervelle ouvert de convergence.
Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence.
ii) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la varibale réelle : $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

b) i) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$.
ii) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.

iii) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe : $z \longmapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

20. a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
    b) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
       i) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$
       ii) $\sum n^{(-1)^n} z^n$
       iii) $\sum \cos n z^n$

21. a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
    b) Soit (a_n) une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
       Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$? Justifier.
    c) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

22. a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
    b) Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x)+\ln(1-2x)$.
       La série obtenue converge-t-elle pour $x=\dfrac{1}{4}$? $x=\dfrac{1}{2}$? $x=-\dfrac{1}{2}$?

23. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.
    a) Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
       On le note R.
    b) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.

24. a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
       On pose $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
    b) Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
    c) i) Déterminer $S(x)$.
       ii) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0)=1,\quad f(x)=\operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x>0,\quad f(x)=\cos\sqrt{-x} \text{ si } x<0$$

       Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

25. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que I_n est bien définie.

b) i) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

27. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

b) Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

c) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

d) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

28. *N.B. : Les deux questions sont indépendantes.*

a) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

b) Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

29. On pose : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

30. a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) i) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

ii) Résoudre (E).

31. a) Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^4 x$.

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

32. Soit l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

a) Trouver les solutions de cette équation différentielle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

b) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

33. On pose : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

34. Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

b) Démontrer que : $x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

c) Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

d) Démontrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

35. E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

a) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
On considère les propositions suivantes :
$P1$: f est continue en a.
$P2$: Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.
Prouver que les propositions $P1$ et $P2$ sont équivalentes.

b) Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

36. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
$P1$: f est continue sur E.
$P2$: f est continue en 0_E.
$P3$: $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.

b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
Démontrer que φ est linéaire et continue.

37. On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$

a) i) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

ii) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall f \in E$, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.

iii) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

38. a) On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\forall f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Soit $u\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On admet que u est un endomorphisme de E.

Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.

Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = ne^{-nt}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul, fixé**.

Soit $u\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$.

i) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

ii) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\cdot\|_2$ où $\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Calculer $|||u|||$.

iii) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\cdot\|_\infty$ où $\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

Calculer $|||u|||$.

c) Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions a), b) et c) sont indépendantes.

39. On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

a) i) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ est convergente.

On pose alors $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

ii) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire sur ℓ^2.

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.

Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

c) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.

Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(|)$).

Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

40. Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$.

On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2$, $\|u.v\| \leqslant \|u\|.\|v\|$.

a) Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

i) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

ii) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.

b) Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

41. Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
Remarques :

a) On utilisera au moins une fois les suites.
b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
c) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

41. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f\,:\,(x,y) \longmapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 13\}$

a) Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
b) Soit $(u,v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.

   i) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
   $(S)\ :\ \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$
   ii) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
   En déduire les valeurs possibles de λ.

c) Déterminer les valeurs possibles de (u,v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

42. On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

43. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

a) i) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   ii) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
b) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.

44. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

a) i) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   ii) Montrer que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

b) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

c) i) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

ii) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

45. **Les questions a) et b) sont indépendantes.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soient A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

a) i) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

ii) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

b) On pose : $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

i) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.

ii) On suppose que A est fermée et que :
$\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1 - t)y) \leqslant t d_A(x) + (1 - t) d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

46. On considère la série : $\sum\limits_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.

b) En déduire que $\sum\limits_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.

c) $\sum\limits_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

47. Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur le disque ouvert de convergence :

a) $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.

b) $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

48. $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

a) Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynômiales.

b) Soit (P_n) une suite de fonctions polynômiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f.

i) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2.

ii) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

iii) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que f est la fonctions nulle sur le segment $[0,1]$.

49. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

a) i) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

ii) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

b) i) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \longmapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

ii) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

50. On considère la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Prouver que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

c) Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

51. a) Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

b) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

c) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \arcsin x$ ainsi que son rayon de convergence.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

52. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

b) i) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.

ii) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.

i) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.

ii) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.

iii) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

53. On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

a) i) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

ii) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

54. Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

b) On pose : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

i) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

ii) Prouver que : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

iii) On pose : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.
Prouver que f est continue sur E.

55. Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n \quad \text{avec } (u_0,u_1) \in \mathbb{C}^2$$

a) i) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

ii) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

b) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

56. (exercice supprimé)

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

a) Montrer que H est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite en $x = 1$.

c) En utilisant la fonction u de la question b), calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

56. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

   a) f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.

   b) f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

   c) On pose $K = [0,1] \times [0,1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

57. a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

      i) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.

      ii) Donner la définition de "f est différentiable en $(0,0)$."

   b) On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

      i) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

      ii) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

58. a) Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et $f : E \longrightarrow F$ une application.
   Donner la définition de "f est différentiable en a."

   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.
   On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$.

      i) Prouver que : $\exists C \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall (x,y) \in E \times E,\ |B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

      ii) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

59. Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
   Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
   On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

   a) Démontrer que f est bijectif de deux manières :

      i) Sans utiliser la matrice de f.

      ii) En utilisant la matrice de f.

   b) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

   c) f est-il diagonalisable ?

60. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

   a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

b) f est-il surjectif ?

c) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

d) A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

61. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Démontrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\|AB\| \leqslant n\|A\|\|B\|$.
Puis démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\|A\|^p$.

c) Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
Est-elle convergente ?

62. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\operatorname{Id} = 0$.

a) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

b) Prouver que $E = \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$:

i) En utilisant le lemme des noyaux.

ii) Sans utiliser le lemme des noyaux.

c) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\operatorname{Im}(f + \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$.

63. (exercice supprimé)
Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carré d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on note D_n le déterminant de A_n.

a) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

b) Déterminer D_n en fonction de n.

c) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A_n ?

63. Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

a) Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $\big(u(x)|x\big) = 0$ est-il forcément l'endomorphisme nul ?

b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) $u \circ u^* = u^* \circ u$.

ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $\big(u(x)|u(y)\big) = \big(u^*(x)|u^*(y)\big)$.

iii) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

64. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

a) Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

b) i) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

ii) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

65. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

b) i) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

ii) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

c) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

66. On note p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kp$.

On note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$.

a) Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? Quelle est celle de p ?

b) Donner soigneusement la définition de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On justifiera que ces définitions sont cohérentes.

c) On admet que, muni de ces opérations, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau.
Démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier.

66. a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

b) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

c) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Rightarrow A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

d) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

67. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

68. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :

i) Sans calcul.

ii) En calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres.

iii) En utilisant le rang de la matrice.

iv) En calculant A^2.

b) On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

69. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, où a est un réel.

a) Déterminer le rang de A.

b) Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

70. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
Déduire de la question a) les éléments propres de B.

71. Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

b) Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

72. Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

a) Donner le rang de f.

b) f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v).

73. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

b) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

74. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) i) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

ii) Déterminer les valeurs propres de A, puis une base de vecteurs propres associée.

b) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$

x, y, z désignent trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la question a), et en le justifiant, résoudre ce système.

75. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.

c) En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

76. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(|)$.
On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

a) i) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ii) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \,/\, \forall x \in [a, b],\ f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

77. Soit E un espace euclidien.

a) Soit A un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.

b) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

i) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

ii) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

78. Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

a) On suppose dans cette partie que $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

   i) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

   ii) Montrer que u est bijectif.

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

c) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Montrer que $u \in \mathcal{O}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

79. Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

   a) Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow h = 0$.

   b) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall (f, g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

   c) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

80. Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   a) Démontrer que $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

   b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \longmapsto \cos x$ et $g : x \longmapsto \cos(2x)$.
   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \longmapsto \sin^2(x)$.

81. On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}(A^\top A')$, où $\mathrm{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A'.
   On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

   a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

   c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

   d) Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

82. Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
   On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

   a) Démontrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

83. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

a) Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

b) On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question a) reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

c) Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

84. a) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ces nombres sont réels.

85. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

i) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\big(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\big)$.

ii) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

b) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

86. a) Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

b) Soit p un nombre premier.

i) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\displaystyle\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\displaystyle\binom{p}{k}$.

ii) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \bmod p$.
Indication : procéder par récurrence.

iii) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

87. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

a) Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i$$

b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

c) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

88. a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall M \in E,\ u(M) = M + (\operatorname{tr} M)A$.

i) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

ii) u est-il diagonalisable ?
Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question a)).

89. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

a) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

b) On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

90. $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés dans $\mathbb{K}$.

a) Montrer que $\Phi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

i) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

ii) Exprimer les polynômes L_1 L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

d) **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

91. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

b) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

c) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

92. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$ où tr désigne la trace et $A^\top$ désigne la transposée de A.

a) Prouver que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.

b) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\top = -A$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

i) Prouver que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

ii) Prouver que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

c) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.

93. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité de E.

a) Montrer que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

b) i) Énoncer le lemme des noyaux.

ii) En déduire que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

c) On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u. Justifier les réponses.

Remarque : les questions a), b) et c) peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

94. a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a|c \quad \text{et} \quad b|c) \quad \Leftrightarrow \quad ab|c$.

c) On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 \mod(17) \\ x \equiv 4 \mod(15) \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

i) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

ii) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

95. Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

a) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

i) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

ii) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

i) Déterminer la loi de X.

ii) Déterminer la loi de Y.

96. On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée à l'instant $t = 1$.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

a) Calculer la loi de X.
b) Prouver que X admet une espérance et la calculer.

97. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbf{P}((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\,j!k!}$$

a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
b) Prouver que $\mathbf{E}\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

98. Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

a) Donner la loi de X. Justifier.
b) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   i) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y = k | X = i)$.
   ii) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   iii) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

99. a) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
b) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
Prouver que : $\forall a \in]0,+\infty[$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y_1)}{na^2}$.
c) **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i^{e} tirage.

100. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

   a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
   b) Calculer λ.
   c) Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
   d) X admet-elle une variance ? Justifier.

101. Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement "l'animal est en A après son n^{e} trajet."
On note B_n l'événement "l'animal est en B après son n^{e} trajet."
On note C_n l'événement "l'animal est en C après son n^{e} trajet."
On pose $\mathbf{P}(A_n) = a_n$, $\mathbf{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbf{P}(C_n) = c_n$.

   a) i) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
      ii) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
      i) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
      ii) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
      iii) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
      Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
   c) Montrer comment les résultats de la question b) peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

102. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbf{P})$ mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

   a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $\mathbf{P}(X_i \leqslant n)$ puis $\mathbf{P}(X_i > n)$.
   b) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$, min désignant "le plus petit élément de".
      i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}(Y > n)$.
      En déduire $\mathbf{P}(Y \leqslant n)$ puis $\mathbf{P}(Y = n)$.
      ii) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbf{E}(Y)$.

103. **Remarque :** les questions a) et b) sont indépendantes.
Soit $(\Omega, A, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

a) i) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, A, \mathbf{P})$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

ii) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

b) Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, A, \mathbf{P})$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paralètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

104. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

a) Préciser les valeurs prises par X.

b) i) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = 2)$.

ii) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

c) i) Calculer $\mathbf{E}(X)$.

ii) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

105. a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

b) On dispose de 100 dés dont 25 pipés (c'est-à-dire truqués).
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

i) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

iii) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

106. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

a) Déterminer la loi du couple (U, V).

b) Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
c) Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
En déduire l'espérance de V.
d) U et V sont-elles indépendantes ?

107. On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n^{e} tirage est blanche". et on pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.
a) Calculer p_1.
b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

108. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbf{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$$

a) Déterminer les lois de X et Y.
b) i) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
ii) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
d) Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

109. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
a) Déterminer la loi de X.
b) Déterminer la loi de Y.

112. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
a) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
b) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
c) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.