CONCOURS COMMUN 2006
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Vendredi 12 mai 2006 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit.

Barème indicatif : 10 points pour chaque problème

Problème 1 : Analyse

Dans tout le problème, on adopte la notation $\ell n^k(x)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,+\infty[$) comme écriture simplifiée du nombre réel $(\ell n\,(x))^k$ et par convention, on pose : $\ell n^0(x) = 1$ (y compris si $x = 1$).

Partie 1 : étude d'un arc paramétré

Pour tout nombre réel strictement positif t, on pose : $x(t) = t.\ell n^3(t)$ et $y(t) = t.\ell n^2(t)$.
On pose également $x(0) = y(0) = \lambda \in \mathbb{R}$.
On souhaite étudier l'arc paramétré $f : t \mapsto (x(t), y(t))$.
Le plan usuel de la géométrie est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}^+$.

1) Pour quelle valeur de λ les fonctions x et y sont-elles continues en 0 ?
On suppose dans la suite que λ prend cette valeur.
2) Déterminer, sur $]0,+\infty[$, les fonctions dérivées x' et y' puis étudier leur signe.
3) Donner dans un même tableau les variations des deux fonctions x et y.
Dans ce tableau devront figurer les limites aux bornes, ainsi que les valeurs de x et y aux points particuliers.
Ces valeurs seront données sous l'une des trois formes suivantes : n, $\dfrac{n}{e^2}$ ou bien $\dfrac{n}{e^3}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
4) Montrer que, lorsque le nombre réel u est au voisinage du nombre 0, on a :

$$x(1+u) \sim u^3 \qquad y(1+u) = u^2 + o\left(u^3\right)$$

En déduire que l'unique point singulier de l'arc, obtenu pour le paramètre $t = t_0$ à déterminer, est un point de rebroussement dont on précisera la nature. Représenter sur un schéma, sans étude supplémentaire, l'allure de $\mathcal{C}$ lorsque t est au voisinage de t_0, en mettant en évidence la tangente au point singulier.
5) Déterminer les limites lorsque t tend vers $+\infty$ puis vers 0 (à droite) de la fonction $t \mapsto \dfrac{y(t)}{x(t)}$.
Conclure quant à la nature de la branche infinie de l'arc ainsi que sur l'existence d'une demi-tangente à l'arc au point de paramètre $t = 0$.
6)a) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = x$.
6)b) Tracer $\mathcal{C}$, en prenant pour unité graphique 4 cm.
On donne les valeurs approchées suivantes (à 0,01 près) : $e^{-2} \simeq 0,14$ *et* $e^{-3} \simeq 0,05$

Partie 2 : calcul de primitives

Soient α un nombre réel distinct de -1 et x un nombre réel quelconque strictement positif.
Pour tout nombre entier naturel n, on considère le nombre réel : $Z_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^x t^\alpha \ell n^{\,n}(t)\,dt$.

7) Calculer $Z_0(x)$ et $Z_1(x)$.
8) Déterminer une relation entre $Z_{n+1}(x)$ et $Z_n(x)$.
9) Montrer :

$$Z_n(x) = \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ell n^{\,k}(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}$$

10) On note $\mathcal{N}_\alpha^n$ l'ensemble des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles, du type suivant

$$x \mapsto p(\ell n\,(x)).x^\alpha$$

où p est une fonction polynomiale quelconque (à coefficients réels) de degré au plus n.
Montrer que toute fonction élément de $\mathcal{N}_\alpha^n$ admet au moins une primitive élément de $\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$.

Partie 3 : résolution d'équations différentielles

Dans toute cette partie, les équations différentielles considérées seront, sauf mention contraire, résolues sur $]0,+\infty[$: ceci signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux fonctions solutions définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles.
Soit α un nombre réel donné.
On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\ :\ x.y' - \alpha\, y = 0 \qquad ; \qquad (E_2)\ :\ x^2.y'' + (1-2\alpha)x.y' + \alpha^2 y = 0$$

où y est l'application inconnue de la variable réelle $x > 0$ et à valeurs réelles.
11) Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles solutions de (E_1).
12)a) Soit $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application quelconque de classe $\mathcal{C}^2$.
On définit alors une nouvelle application :

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto k(u) = h(e^u) \end{aligned}$$

Justifier que k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Pour $u \in \mathbb{R}$, exprimer $k'(u)$ et $k''(u)$ à l'aide des dérivées première et seconde de h.
12)b) Montrer que h est solution de (E_2) (c'est-à-dire : $\forall x > 0\,,\ x^2.h''(x)+(1-2\alpha)x.h'(x)+\alpha^2 h(x) = 0$) si et seulement si on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}\,,\ k''(u) - 2\alpha\, k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0$$

12)c) Déterminer l'expression de $k(u)$ pour $u \in \mathbb{R}$ lorsque h est solution de (E_2).
12)d) En déduire que l'ensemble des solutions de (E_2) est l'ensemble $\mathcal{N}_\alpha^1$ (*cf.* partie 2)
13)a) On considère l'application :

$$\begin{aligned} P : \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R}) \\ y &\longmapsto x.y' - \alpha y \end{aligned}$$

On pose : $P^1 = P$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P^{n+1} = P^n \circ P$.
Pour $y \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, calculer $(P\circ P)(y)$. En déduire : $P^2(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}_\alpha^1$.
13)b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P^n(y) = 0$ est une équation différentielle d'ordre n du type

$$x^n.y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^k.y^{(k)} = 0$$

(avec $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des nombres réels que l'on ne cherchera pas à déterminer)
13)c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $P^n(y) = 0$ est $\mathcal{N}_\alpha^{n-1}$.

Problème 2 : Algèbre

Dans tout le problème, on fixe un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un nombre réel α.

Notations :

• si p et q sont deux nombres entiers naturels avec $p \leqslant q$, alors on désigne par $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des nombres entiers naturels k tels que : $p \leqslant k \leqslant q$.
• si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, alors on désigne par $a \wedge b$ le PGCD de a et b.
• si $k \in \mathbb{N}$, alors on note $\mathbb{C}_k[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus k à coefficients complexes.

Partie 1 : un résultat d'arithmétique

Remarque : seul le résultat de la question 4 est utilisé dans la suite du problème, à la question 14.

On considère l'ensemble suivant : $A_{n,\alpha} = \{p \in \mathbb{N}^* \ / \ \exp(2i\pi n p \alpha) = 1\}$

1) Montrer que $A_{n,\alpha}$ n'est pas l'ensemble vide si et seulement si α est un nombre rationnel.
On veillera à montrer séparément les deux implications correspondant à cette équivalence.

Supposons à présent et jusqu'à la fin de cette partie que α soit un nombre rationnel non-nul.
Notons $p(\alpha)$ le plus petit élément de $A_{n,\alpha}$.
Le but est de calculer $p(\alpha) = \min(A_{n,\alpha})$.
2) Justifier l'égalité : $p(\alpha) = p(-\alpha)$.

On pose : $|\alpha| = \dfrac{r}{s}$ avec $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $r \wedge s = 1$.
On note également : $d = n \wedge s$. On définit les nombres entiers n' et s' par : $n = d.n'$ et $s = d.s'$.
3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $p \in A_{n,\alpha} \Leftrightarrow [\exists\, t \in \mathbb{N}^*\, , \, p.n'.r = s'.t]$
4) Montrer : $p(\alpha) = \dfrac{s}{n \wedge s}$.

Partie 2 : un ensemble de matrices

On note $\mathbb{J}$ l'ensemble de toutes les matrices du type $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ lorsque λ décrit $\mathbb{C}^*$.
On note également I la matrice diagonale d'ordre 3 dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

5) $\mathbb{J}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Justifier la réponse donnée.
6) On note N la matrice J_0. Calculer N^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
En déduire que, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe trois suites complexes u, v et w dont on exprimera le terme général à l'aide de λ telles que : $\forall p \in \mathbb{N}\, , \, (J_\lambda)^p = u_p.I + v_p.N + w_p.N^2$.
7) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose : $\forall p \in \mathbb{N}\, , \, S_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{1}{k!}\,(J_\lambda)^k$.
Montrer qu'il existe une suite complexe x que l'on explicitera telle que pour tout nombre entier p supérieur ou égal à 2, on ait :

$$S_p = x_p.I + x_{p-1}.N + \frac{1}{2}x_{p-2}.N^2$$

8) *On admettra le résultat suivant : si $z \in \mathbb{C}^*$, alors* $\lim\limits_{p \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{z^k}{k!} = e^z$
Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $a_{i,j}(p)$ le coefficient de S_p situé sur la ligne i et sur la colonne j (avec $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$).
Déterminer la matrice S dont le coefficient général $a_{i,j}$ est égal à : $a_{i,j} = \lim\limits_{p \to +\infty} a_{i,j}(p)$.

Partie 3 : étude d'une application linéaire

On note E l'ensemble de toutes les applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On rappelle que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les lois suivantes : si f et g sont deux telles applications et λ un nombre complexe, alors $f+g$ et $\lambda.f$ sont définies comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{et} \qquad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

On note d'autre part $[0]$ l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, à savoir $[0] : x \mapsto 0$.

9) Pour $f \in E$, on appelle g l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g(x) = f(x+2\pi)$.
Montrer avec soin que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f) = g$ est un endomorphisme de E.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on désigne par E_k le sous-ensemble de E constitué des applications du type : $x \mapsto P(x).e^{i\alpha x}$ avec $P \in \mathbb{C}_k[X]$.
10)a) Montrer que E_n est le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{F} = (f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ où l'on note :

$$f_0 : x \mapsto e^{i\alpha x}\ ;\ f_1 : x \mapsto x.e^{i\alpha x}\ ;\ \ldots\ ;\ f_n : x \mapsto x^n.e^{i\alpha x}$$

Montrer alors que $\mathcal{F}$ est une base de E_n.
10)b) Exprimer simplement E_{n+1} à l'aide de E_n et de la droite vectorielle $\{\lambda.f_{n+1}\,/\,\lambda \in \mathbb{C}\}$.
11)a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Ecrire $\varphi(f_k)$ comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$.
11)b) En déduire : $\varphi(E_n) \subset E_n$.
12) On désigne par m l'endomorphisme de E_n défini par : pour $f \in E_n\,,\ m(f) = \varphi(f)$.
On note M la matrice de m relativement à la base $\mathcal{F}$. Montrer que M est une matrice triangulaire supérieure (d'ordre $(n+1)$) que l'on présentera sous forme d'un tableau en faisant seulement figurer les coefficients nuls, les coefficients diagonaux ainsi que ceux situés juste au-dessus de la diagonale.
13) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, le déterminant de l'endomorphisme $(m)^p$.
14) Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, donner le plus petit entier naturel non-nul p tel que $(m)^p$ soit de déterminant égal à 1.

Partie 4 : changement de base

On reprend toutes les notations de la partie 3.
On note id l'application identique de E_n, à savoir : $id : f \mapsto f$.
On considère un nouvel endomorphisme : $\ell = m - (e^{2i\pi\alpha}).id$

15)a) Vérifier que $\ell(f_0)$ est l'application nulle $[0]$.
15)b) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$.
Montrer que $\ell(f_{k+1})$ est un élément de E_k et que sa composante selon f_k vaut : $2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}$
15)c) En déduire (par récurrence) : $\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ E_k \subset \operatorname{Ker}(\ell^{k+1})$.
15)d) Etablir la propriété suivante :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \ell^k(f_k) = \left(k!\,(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}\right).f_0$$

15)e) En déduire : $\ell^n(f_n) \neq [0]$ et $\ell^{n+1}(f_n) = [0]$.
16) Montrer que $\mathcal{B} = (\,\ell^n(f_n)\,,\ \ell^{n-1}(f_n)\,,\ \ldots\,,\ \ell(f_n)\,,\ f_n)$ est une base de E_n.
17) Déterminer relativement à la base $\mathcal{B}$ la matrice de ℓ.
18) En déduire la matrice de m dans la base $\mathcal{B}$. On note M' cette matrice.
19) On note $\mathbb{J}_{n+1}$ l'ensemble des matrices carrées $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}$ à coefficients complexes vérifiant les quatre conditions suivantes :

- $a_{1,1}$ est de module 1
- $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2\,,\ a_{i,i} = a_{j,j}$
- $\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ a_{i,i+1} = 1$
- $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2\,,\ [j-i \notin \{0\,,\,1\} \Leftrightarrow a_{i,j} = 0]$

Montrer que l'application qui à un nombre réel α associe la matrice M' est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{J}_{n+1}$.