1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes : autrement dit, donner l'ensemble des solutions. Dans chaque cas il faut se ramener à une équation d'un type connu.

   a) $x + 1 = \sqrt{x+1}$
   b) $x - 1 = \sqrt{x+1}$
   c) $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$
   d) $2e^{2x} - e^x - 1 \leqslant 0$
   e) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2x-1} > 1$

2. **Équation à paramètre**
   Soit a un paramètre réel. On considère l'équation $(E)\ :\ 1 + x = a(1-x)$ d'inconnue x.
   Donner en fonction de a l'ensemble des solutions.

3. **Étude de signe, simplification d'expression**
   Soit $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ et $g(x) = x - 2\sqrt{x-1}$.

   a) Donner $\mathcal{D}_g$, l'ensemble de définition de g.
   b) Montrer que pour tout x dans $\mathcal{D}_g$, $g(x) \geqslant 0$.
   c) Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f
   d) Simplifier $f(x)^2$, et en déduire une expression de $f(x)$ plus simple que celle de départ.
   e) Tracer le graphe de f (sans utiliser de calculatrice, bien sûr)

4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Traduire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes (sans utiliser la dérivée) et faire un dessin qui traduit la propriété.

   a) f est constante (avec deux $\forall$).
   b) f est constante (avec un $\forall$ et un $\exists$).
   c) f n'est pas constante.
   d) f est croissante.
   e) f n'est pas croissante.

5. Pour chacune des propriétés suivantes :
   - Écrire sa négation en utilisant des quantificateurs ($\exists$ et $\forall$)
   - Dire si elle est vraie.

   a) $p_1\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$
   b) $p_2\ :\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$
   c) $p_3\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$
   d) $p_4\ :\ \exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2$
   e) $p_5\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x) \leqslant 0$
   f) p_6 : cet été, il a fait tous les jours plus de 30°.

6. Dire si les expressions ensemblistes suivantes ont un sens et si oui, les traduire en une phrase.
   a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leqslant 2\}$
   b) $\{x^3 - x \,|\, x \in [-1, 3]\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2\}$
   d) $\{e^x > 1 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

7. Décrire explicitement les ensembles suivants sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.
   a) $E_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, e^x \leqslant 2\}$
   b) $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geqslant 4x\}$
   c) $E_3 = \left\{\cos x \,|\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$
   d) $E_4 = \{x^2 \,|\, x \in [-1, 2]\}$

8. **Propriétés diverses**
   Montrer les propriétés suivantes :
   a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x \leqslant 20 \Rightarrow |x| \leqslant 5$
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n-1)$ est pair.
   c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\left[x^2 + xy + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 0)\right]$
   d) Pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\left(\exists x \in \mathbb{R}^{*+} \,|\, y = x + \frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y \geqslant 2$$

Récurrences

1. Montrer les propriétés suivantes :

   a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

   c) $\forall n \geqslant 4,\ n! > 4^{n-2}$

   d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod\limits_{k=1}^{n} (4k-2) = \dfrac{(2n)!}{n!}$

   e) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in [0, \pi],\ |\sin(n\theta)| \leqslant n \sin\theta$

   Rappels :
   - Inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$
   - Formule d'addition : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

2. **Principe de récurrence double**

   a) Soit p_n une propriété dépendant de l'entier n, définie pour $n \geqslant n_0$.
   On suppose que

   $$\begin{cases} p_{n_0} \text{ et } p_{n_0+1} \text{ sont vraies} \\ \forall n \geqslant n_0,\ (p_n \text{ et } p_{n+1}) \Rightarrow p_{n+2} \end{cases}$$

   Montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, p_n est vraie.
   Indication : on pourra appliquer le principe de récurrence simple à une propriété q_n bien choisie.

   b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

   $$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} \qquad \text{(suite de Fibonacci)}$$

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

Sommes

3. Écrire les sommes suivantes à l'aide d'un $\sum$ (on ne cherchera pas à les simplifier) :

   a) $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n$

   b) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$

   c) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$

4. Expliciter tous les termes des expressions suivantes, pour $n = 1,\ 2,\ 3$ successivement (ne pas chercher à simplifier le résultat) :

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

   b) $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$

5. Les formules suivantes sont-elles vraies ou inventées ?

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k v_k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k + v_k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)$

   c) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k - v_k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)$

   d) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k + c) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) + c$

   e) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k^2) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)^2$

   f) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{v_k} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k}$

   g) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(u_k) = \cos\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$

6. Simplifier (si possible) la somme (ou le produit) en une expression explicite.
   n est un entier strictement positif.

   a) **Calculable ou pas ?**

      i) $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k}$

      ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}$

      iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

      iv) $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k^2}$

   b) **Sans coefficients binomiaux**

      i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(3 \times 2^k + 1\right)$

      ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k - 1 + 2^k)$

      iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{2k+1}$

      iv) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \exp\left(\dfrac{k}{n}\right)$

      v) $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{k+1}\right)$

      vi) $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\times(n+1)}$.

         Indication : on pourra chercher deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

      vii) $\prod\limits_{k=1}^{n} \exp\left(\dfrac{k}{n}\right)$

      viii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{2}\right)$

ix) $\sum_{k=0}^{n} |k-1|$

c) **Avec coefficients binomiaux**

$(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

i) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

ii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$

iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{2k+1} b^{n-k}$

v) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+k}$

d) **Sommes doubles**

i) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$

ii) $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j}$

iii) $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$ Pour simplifier le calcul, considérer $S_{n+1} - S_n$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

a) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Simplifier $f(x)$.

b) En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur explicite de $g(x) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

c) En déduire S.

d) Vérifier que pour tous k, n tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, et retrouver l'expression explicite de S par un calcul direct.

1. Justifier que f est dérivable sur l'ensemble précisé, et calculer sa dérivée.

   a) $f : x \longmapsto x^x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

   b) $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[0,1[$

   c) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

   d) $f : x \longmapsto \ln\left[(x^2+1)^3\right]$ sur $\mathbb{R}$

   e) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (ensemble à déterminer)

   f) $f : x \longmapsto \sqrt{\sqrt{x-2}-1}$ (chercher l'ensemble de définition)

2. **Inégalités à démontrer**

   a) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$

   b) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sin x \leqslant x$

   c) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \leqslant 1 + xe^x$

3. Soit $f\colon \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array}$ et $g\colon \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array}$

   a) Donner l'expression de f', f'', f'''.

   b) Recommencer le calcul, sans se tromper cette fois.

   c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de $f^{(n)}$.

   d) Donner l'expression de $g^{(n)}$.

   On pourra chercher $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.

4. Soit $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

   Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Pour chacun des réels suivants, donner une expression par radicaux (c'est à dire une expression qui n'utilise que les 4 opérations et la racine carrée).
   On pourra penser aux formules d'addition et de duplication.

$$\cos\frac{\pi}{12} \qquad \sin\frac{\pi}{12} \qquad \cos\frac{7\pi}{12} \qquad \cos\frac{5\pi}{8} \qquad \sin\frac{5\pi}{8}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $-\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 1$
   b) $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$
   c) $\cos x = \sin 4x$
   d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
   e) $2\sin x - 1 < 0$
   f) $2\sin x - 1 < \sqrt{1-\cos^2 x}$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6}$.
   a) Montrer que l'équation $(E_1) : f(x) = x$ a exactement 3 solutions réelles, qui sont dans $]-1,1[$.
   Les solutions seront notées respectivement α, β, γ par ordre croissant.
   b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$.
   c) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $(E_2) : \sin(3t) = \frac{1}{2}$.
   On donnera les solutions par ordre croissant.
   d) Montrer que pour toute solution x de (E_1), il existe un unique $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \sin t$.
   e) Montrer que $\beta = \sin\frac{\pi}{18}$.
   Exprimer α et γ de la même façon.

4. Équations diverses à résoudre (dans $\mathbb{R}$)
   a) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)$
   b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$
   c) $(\cos^3 x)\sin(3x) + (\sin^3 x)\cos(3x) = \frac{3}{4}$
   On pourra commencer par exprimer $\sin(3x)$ *en fonction de* $\sin x$*, et* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos x$*.*

5. Étudier la fonction $f : x \longmapsto 3\sin x - \sin(3x)$ et représenter sa courbe.

1. **Exercice d'entraînement**

   a) Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres :

   $$\frac{3+6i}{3-4i} \qquad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i} \qquad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$$

   b) Même question avec les nombres :

   $$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \qquad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

2. **Forme algébrique / trigonométrique (complexe)**
   Mettre les complexes suivants sous forme algébrique (A) ou sous forme trigonométrique généralisée (T).

   a) $z_1=\dfrac{1}{\dfrac{i}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$ (A+T)

   b) $z_2=1+e^{i\theta}$ $\quad\theta\in[0,2\pi[\setminus\{\pi\}$ (T)

   c) $z_3=1-e^{i\theta}$ $\quad\theta\in]0,2\pi[$ (T)

   d) $z_4=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$ $\quad\theta\in[0,2\pi[\setminus\{\pi\}$ (T+A)

   e) $z_5=(j+1)^{2024}$ $\quad$ avec $j=\exp\left(\dfrac{i2\pi}{3}\right)$ (A+T)

3. Vrai ou faux ?

   a) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad (a+ib)+i(a-2ib)=0\Rightarrow\begin{cases}a+ib&=0\\a-2ib&=0\end{cases}$

   b) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad (a+ib)+i(a-ib)=0\Rightarrow\begin{cases}a+ib&=0\\a-ib&=0\end{cases}$

4. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On considère l'équation (E) : $\dfrac{1+iz}{1-iz}=e^{i\theta}$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
   Résoudre (E). On donnera le nombre de solutions en fonction de θ et on donnera les solutions sous forme trigonométrique.

5. Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $\dfrac{z-i}{1-iz}\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\quad|z|=1$

6. Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer en fonction de a l'ensemble des complexes z tels que $z+a\overline{z}\in\mathbb{R}$.

7. Pour chaque question, on pourra soit faire une résolution calculatoire, soit une résolution géométrique.

   a) Déterminer l'ensemble $E=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z-i|=|z+3i|\}$.

   b) Déterminer l'ensemble $F=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z+1|\leqslant 1 \text{ et } |z-1|\leqslant 1\}$

1. Donner une primitive de la fonction f sur l'ensemble précisé.

   a) $f(t) = t(t^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

   b) $f(t) = e^{2t}\sin t$ sur $\mathbb{R}$

   c) $f(t) = (2t+1)^4$ sur $\mathbb{R}$

   d) $f(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$ sur $]-1,1[$

2. **Compréhension de la notion d'intégrale**

   a) Quand cela a un sens, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

      i) Donner l'ensemble de définition de f.

      ii) Sans faire de calcul explicite, donner le tableau de signe de f.

   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$. *Appliquer la définition de l'intégrale.*

   c) Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$

      Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, puis donner l'expression explicite de f.

3. Calculer les intégrales suivantes :

   a) $\displaystyle\int_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int_1^t x^n \ln x\,\mathrm{d}x$ $(t \in \mathbb{R}^{*+},\ n \in \mathbb{N})$

   e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$

   f) $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

   g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

   h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$

4. Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ $t = e^x$

   b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\tan x + \tan^3 x)\,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

   e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 2\tan x + 5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

   f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^{2024}\sin x\,\mathrm{d}x$ $t = -x$

5. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$

   a) Étudier la parité de f (on pourra faire un changement de variable).

   b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f.

6. **Série harmonique alternée**

   Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, c'est à dire $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$

   a) En considérant $\displaystyle\int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

   b) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Montrer par encadrement que (I_n) converge et donner sa limite.

   c) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

7. **Lemme de Riemann [1]-Lebesgue [2]**

   Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On définit pour pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (on pourra faire une intégration par parties).

   Remarque : On a un résultat analogue avec cos à la place de sin.

1. Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand. Il a été le premier à formaliser la théorie de l'intégration que nous utilisons en prépa. Il a également travaillé sur les géométries non euclidiennes et la répartition des nombres premiers.
2. Henri Lebesgue (1875-1941), mathematicien français. Il a élaboré une théorie de l'intégration plus puissante et plus générale que celle de Riemann et qui est largement utilisée aujourd'hui.

Transformations trigonométriques, utilisation de l'exponentielle complexe

1. a) Linéariser $\sin^5 x$.
   b) Déterminer une fonction P telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(5x) = P(\cos x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Expliciter les sommes suivantes. Il ne doit pas rester de complexes dans la réponse.
   a) $A_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$
   b) $C_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k x}$ $\quad (x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right])$
   c) $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{\cos(kx)}{2^k}$

Équations - racines n^{es}

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
   a) $(E_1)\ :\ z^4 - z^2 + 1 + i = 0$
   b) $(E_2)\ :\ z^3 = i$ (donner les solutions sous forme trigonométrique et algébrique)
   c) $(E_3)\ :\ z^6 = -64$ (idem)
   d) $(E_4)\ :\ z^4 + 1 = 0$ (idem)
   e) $(E_5)\ :\ \overline{z} = iz$

4. **Banque CCINP exercice 84**
   a) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
   c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ces nombres sont réels.
   On précisera le nombre de solutions.

5. **Banque CCINP exercice 89**
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
   a) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
   b) On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Donner la somme et le produit des racines n^{es} de l'unité.

7. a) Donner l'expression d'une fonction P polynômiale telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(5x) = P(\sin x)$.
   b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $P(t) = 0$.

c) En déduire une expression par radicaux de $\sin\left(k\dfrac{\pi}{5}\right)$ pour $k \in [\![0,4]\!]$.

8. Soit $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{7}\right)$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
   Calculer $A + B$ et AB (en particulier, montrer qu'ils sont entiers).
   En déduire une expression par radicaux de A et B.

Géométrie

9. Soit $ABCD$ un quadrilatère direct. On construit les triangles isocèles rectangles directs $A'BA$, $B'CB$, $C'DC$, $D'AD$, d'angles droits respectifs A', B', C', D'. Montrer que $[A'C']$ et $[B'D']$ sont orthogonaux et de même longueur.
   On commencera par traduire en terme d'affixe le fait que le triangle $A'BA$ est direct et isocèle rectangle en A', et de même pour les autres.

10. Si a est un complexe non nul, on note p et q les racines carrées de a.
    Les points d'affixes respectives a, p, q sont notés A, P, Q.
    Déterminer l'ensemble des a tels que le triangle APQ soit rectangle en A.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des éventuelles conditions initiales :

   a) $x' + 2x = 3$ sur $\mathbb{R}$
   b) $(1+t^2)x' + 2tx = 1$ sur $\mathbb{R}$
   c) $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
   d) $\begin{cases} x' - tx = t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$
   e) $\begin{cases} x' + x\tan t = \sin(2t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
   f) $\sqrt{1-t^2}x' + tx = 1$ sur $]-1,1[$ *(exprimer une solution particulière sous forme intégrale)*

2. Même question

   a) $y'' - 4y' + 3y = 0$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$
   b) $y'' - 6y' + 9y = 0$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$
   c) $y'' - 2y' + 2y = 0$
   d) $y'' + 4y = e^{-x}$, avec $y(0) = y'(0) = 0$
   e) $y'' - 4y' + 3y = 2e^x$
   f) $2y'' - y' - y = 2x - 1$ *Chercher une solution particulière affine.*

3. **Banque CCINP, exercice 42**
   On considère les deux équations différentielles suivantes :
   $2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
   $2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

   a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

4. **Recollement de solutions**
   On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ tx'(t) + x(t) = 1$

   a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{*+}$ puis sur $\mathbb{R}^{*-}$
   b) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On donnera en particulier le nombre de solutions.
      Une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ doit au minimum être définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.

5. **Équation intégrale**
   Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}} - \displaystyle\int_0^t xf(x)\,\mathrm{d}x$.

6. Résoudre les équations suivantes :

   a) $(1+e^x)y''(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0$. On pourra poser $z = y' + y$.
   b) $x^2y''(x) - 2y(x) = x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. On pourra effectuer le changement de variable $t = \ln x$.

7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

   Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x'' + x = f \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ a pour expression

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \int_0^t \sin(t-u) f(u)\, \mathrm{d}u$$

8. **Équation logistique** (dynamique des populations)

   On considère l'équation différentielle **non linéaire** suivante :

$$(E) : \ y' = ky(1-y)$$

   où k est une constante strictement positive donnée.

   Cette équation modélise l'évolution de la population d'une espèce animale[3] au cours du temps, dans un territoire isolé (pas de prédateurs), présentant une quantité limitée de ressources (nourriture, territoire)

   Soit $y_0 \in \mathbb{R}^{*+}$. On admet que (E) admet une unique solution y vérifiant $y(0) = y_0$, définie sur $\mathbb{R}^+$, et que celle-ci ne prend que des valeurs strictement positives.

   a) On pose $z = \dfrac{1}{y}$.

      Montrer que z est solution d'une équation différentielle **linéaire** (E').

   b) Résoudre (E').

   c) On suppose que $y_0 \in]0,1[$. Déterminer l'expression de y. Étudier ses variations et sa limite en $+\infty$.

   d) Mêmes questions si $y_0 > 1$.

   Interprétation de cette équation $y' = ky(1-y)$:

   On peut imaginer, en première approximation, que l'accroissement de la population est proportionnel à la population : $y' = ky$.

   Mais dans ce cas, la population va croître très rapidement, exponentiellement ($y(t) = y_0 e^{kt}$), ce qui n'est pas compatible avec le caractère fini des ressources.

   C'est pourquoi on rajoute un facteur correctif $1 - y$ pour traduire le fait que plus la population est nombreuse, moins elle va pouvoir s'étendre. Au contraire, si elle dépasse un certain seuil (ici égal à 1), il n'y a pas assez de ressources pour tout le monde, donc la population va diminuer ($y' < 0$).

3. Ce type d'équation peut aussi se rencontrer en cinétique chimique, dans le cas d'une réaction $A \longrightarrow B$ où la vitesse de réaction est proportionnelle à $[A][B]$

Coefficients, degré

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant des fonctions polynômiales suivantes :

$$P_1(x) = (x^4 - 1)^3 \qquad P_2(x) = (x+1)^n - (x-1)^n \qquad P_3 = P^2 - P + 1$$

P : fonction polynômiale de degré n, unitaire.

2. **Formule de Vandermonde**
Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Déterminer de deux façons différentes la suite des coefficients de la fonction polynômiale

$$P(x) = (1+x)^n (1+x)^m$$

En déduire que $\forall r \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$.

3. **Identification ?** *Questions indépendantes*
Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite presque nulle, et $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$.
Montrer que :
   a) P est paire (resp. impaire) $\quad\Leftrightarrow\quad \forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$ (resp. $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$)
   b) Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(e^t) = 0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$.

4. **Interpolation**
Montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale P (à déterminer) de degré 3 telle que :

$$P(1) = 0, \quad P(2) = 1, \quad P(3) = 0, \quad P(4) = 3$$

Racines, factorisation

5. a) Montrer que la fonction polynômiale $P(x) = 2x^3 - 6x + 1$ a trois racines réelles distinctes (**qu'on ne cherchera pas à calculer**). On les note α, β, γ.
   b) Calculer $\alpha\beta\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$.
   c) Question subsidiaire : calculer $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

6. Factoriser entièrement les polynômes suivants.

   a) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 6$ *Indication : P a une racine imaginaire pure.*
   b) $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 12x + 12$.
   c) $P(x) = x^4 + 12x - 5$ *Indication : il y a deux racines dont la somme est* 2.
   d) $P(x) = x^3 + 1$.
   e) $P(x) = x^8 + x^4 + 1$.
   f) $P(x) = 2x^n - 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

7. Soit $n \geqslant 2$. Factoriser (dans $\mathbb{C}$) le polynôme

$$P \,:\, z \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

8. **D'après CCINP Exercice 84**
   Questions b)c)d) déjà faites (TD sur les complexes), seules les questions a) et e) sont nouvelles ici.
   Pour la question e), on pourra reprendre l'expression des solutions de l'équation sans justifier.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $(E) \,:\, (z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

   a) (question supplémentaire) Justifier, sans la résoudre, que (E) a au plus $n-1$ solutions dans $\mathbb{C}$.
   b) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
   d) Déduire de la question c) les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) et démontrer que ces nombres sont réels.
   e) (question supplémentaire) Factoriser dans $\mathbb{C}$ la fonction polynomiale $P \,:\, x \longmapsto (x+i)^n - (x-i)^n$.

9. **Polynômes de Chebychev**
   On définit la suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\, P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) \end{cases}$$

   a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n et son coefficient dominant (noté α_n).
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos t) = \cos(nt)$.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n est l'unique fonction polynômiale vérifiant la propriété précédente, autrement dit si Q est une fonction polynômiale telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $Q(\cos t) = \cos(nt)$, alors $Q = P_n$.
   d) Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les racines de P_n dans $[-1, 1]$.
   e) Montrer qu'on obtient ainsi toutes les racines de P_n dans $\mathbb{C}$, et en déduire la factorisation complète de P_n.

1. Soit $f : E \longrightarrow F$. Traduire avec des quantificateurs :

   a) f n'est pas injective.

   b) f n'est pas surjective.

2. On considère les applications :

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x+1}{2} \text{ si } x \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

   a) f est-elle injective ? surjective ?

   b) Mêmes questions avec g.

   c) Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, et dire si elles sont injectives, surjectives.

3. Pour chaque fonction, dire si elle injective, puis surjective.
   — Pour celles qui ne sont pas surjectives, préciser l'ensemble image.
   — Pour celles qui sont bijectives, donner l'expression de la réciproque quand c'est possible.

   a) $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

   b) $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

   c) $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$

   d) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

   e) $f\colon \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x - \dfrac{1}{x} \end{array}$

   f) $f\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{P}([\![1,3]\!]) & \longrightarrow & \mathcal{P}([\![1,3]\!]) \\ A & \longmapsto & A \cup \{1\} \end{array}$

   g) $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

   h) $f\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$

   i) $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

   j) $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, xy - y^3) \end{array}$

4. Soit E, F et G trois ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
   Soit $h = g \circ f$

   a) Montrer que si h est injective, alors f est injective.

   b) Montrer que si h est surjective, alors g est surjective.

   c) Montrer que si h est injective et f surjective, alors g est injective.

   d) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

5. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$

   a) Déterminer $f(\mathbb{R})$ par 2 méthodes différentes :

      i) En étudiant les variations de f.

      ii) Sans étudier les variations de f.

   b) En étudiant les variations, déterminer $f\left(\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[\right)$

   c) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[\right)$

   d) Soit $g\colon \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

   Montrer que g est bien définie et qu'elle est bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

6. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{1-2x} \end{array}$

   Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective, et déterminer l'expression de f^{-1}

7. Soit $f : E \longrightarrow F$. On définit les deux fonctions g et h par :

$$g\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array} \quad \text{et} \quad h\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ Y & \longmapsto & f^{-1}(Y) \end{array}$$

   Montrer que :

   a) f est surjective $\Leftrightarrow$ g est surjective.

   b) f est injective $\Leftrightarrow$ g est injective.

   c) f est injective $\Leftrightarrow$ h est surjective.

   d) f est surjective $\Leftrightarrow$ h est injective.

1. Soit $f\ :\ x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'. Que peut-on en déduire ?

2. **Expressions de la forme arctrigo ∘ trigo**
   a) Soit $f\ :\ x \longmapsto \arccos(\cos x)$
      i) Déterminer l'ensemble de définition de f.
      ii) Étudier les symétries de la fonctions f (parité, périodicité,...) et en déduire qu'on peut restreindre l'étude à un intervalle I dans lequel l'expression de f est simple.
      iii) Tracer la courbe de f en expliquant pas à pas la construction de la courbe.
      iv) Déterminer $f\left(\dfrac{23\pi}{19}\right)$ sous la forme $\dfrac{a\pi}{b}$, où a et b sont deux entiers.
   b) Mêmes questions avec la fonction $g\ :\ x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.
   c) Mêmes questions avec la fonction $h\ :\ x \longmapsto \arctan(\tan x)$.

3. **Simplification d'expressions de la forme trigo ∘ arctrigo**
   Pour chacune des fonctions suivantes : donner l'ensemble de définition, puis la simplifier en une expression par radicaux (n'utilisant plus de fonction trigonométrique ni réciproque).
   a) $g\ :\ x \longmapsto \cos(\arctan x)$ réponse : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
   b) $h\ :\ x \longmapsto \sin(\arctan x)$
   c) $i\ :\ x \longmapsto \tan(\arcsin x)$
   d) $j\ :\ x \longmapsto \sin^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right)$

4. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$
   b) Soit $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$.
      Calculer u_n explicitement, et déterminer $\lim(u_n)$.

5. Calculer les intégrales suivantes :
   a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arcsin t \,\mathrm{d}t$ $\quad (x \in]-1,1[)$
   b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ $\quad$ (CdV $t = \arcsin x$)
   c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+i}\,\mathrm{d}t$
   d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{R^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$ $\quad (R>0,\ x \in]-R,R[)$
   e) $I = \displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad (R>0)$
      (CdV $x = R\cos t$)
      Interprétation géométrique ?
   f) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t$ $\quad (x \in \mathbb{R})$
   g) $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{4x-2}{4x^2+4x+17}\,\mathrm{d}x$

6. Résoudre les équations suivantes.

   a) $\arcsin x = 2 \arctan x$

   b) $\arccos \dfrac{1}{3} + \arccos \dfrac{1}{4} = \arcsin x$

7. **Fonctions hyperboliques réciproques**

   a) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer. La réciproque est notée argsh (argument sinus hyperbolique).

   b) Calculer l'expression explicite de argsh.

   c) Sans utiliser son expression, déterminer l'ensemble de dérivabilité de argsh et l'expression de sa dérivée.

   d) Mêmes questions pour $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}^+}$.

   e) Mêmes questions pour th.

1. **Exercice-cours** (méthodes à connaître)

   a) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer B^2, B^3. En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   b) On pose $M = 2I_3 + B$. Calculer M^n explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et
   $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$
   On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$
   Exprimer X_{n+1} en fonction de M et X_n.

   d) En déduire X_n explicitement (sans puissance matricielle), puis u_n, v_n, w_n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

   b) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

3. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et J la matrice dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   Calculer J^2, J^3 puis conjecturer une expression pour J^n, $n \in \mathbb{N}$ puis la démontrer.

   b) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent 2, les autres 1.
   Exprimer A comme combinaison linéaire de I et J.

   c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   d) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}. *On pourra considérer $xI + yJ$.*

4. **Diagonalisation d'une matrice**.
   On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   On veut calculer les puissances successives de A.

   a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
   Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   b) Soit $D = P^{-1}AP$. Calculer D puis calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation exprimant D^n en fonction de A^n, P et P^{-1}.
   On pourra regarder ce qui se passe pour $n = 2$ puis essayer de généraliser.

   d) En déduire A^n.

   e) Soit (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$
   Calculer explicitement ces deux suites. *On pourra poser $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$*

5. **Commutant et racines carrées d'une matrice diagonale**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que
   $$AM = MA \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est diagonale}$$
   b) Montrer que si $M^2 = A$, alors $AM = MA$.
   c) Trouver toutes les matrices M telles que $M^2 = A$. Combien y en a-t-il ?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique sous la forme $M = A + B$, avec A symétrique et B antisymétrique.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Montrer que $A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(A^\top A) = 0$.

8. Soit $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   a) Calculer A^2 et vérifier que $\quad A^2 - 3A + 2I = 0$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad B_n = A^{n+1} - 2A^n$
   Montrer que la suite (B_n) est constante.
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad C_n = A^n + A - 2I$.
   Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = 2C_n$
   d) En déduire l'expression de $\; A^n \;$ comme combinaison linéaire de A et I.
   e) On considère les 3 suites (u_n) (v_n) et (w_n) définies par :
   $$u_0 = 0 \quad v_0 = 1 \quad w_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = v_n - w_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 4v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}$$
   Calculer leur terme général.

9. Existe-t-il $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = I_n$?

10. **Matrice qui commute avec tout**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \,/\, A = \lambda I_n$$