

Programme de colle - semaine 03 du 30/09/2024 au 06/10/2024

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un (*).

1. Les complexes

Dans cette première colle, uniquement des exercices avec des petits calculs de base utilisant la forme algébrique, la forme exponentielle ou l'angle moitié.

- Forme algébrique d'un complexe. Partie réelle, imaginaire.
- Opérations de base : somme, produit, inverse, conjugué.
- Module. Propriétés : module d'un produit (*), quotient. Inégalité triangulaire (*), cas d'égalité.
- Exponentielle d'un imaginaire pur, $e^{i(\theta+\theta')} = \dots$, formules d'Euler, de Moivre.
- Argument, exponentielle d'un complexe quelconque (pas d'exercice fait). Forme trigonométrique (ou exponentielle) d'un complexe non nul.
- Angle moitié, mise sous forme trigonométrique de $1 \pm e^{i\theta}$ ou $e^{ia} \pm e^{ib}$: le résultat n'est pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver rapidement.
- **CE QUI SUIT N'A PAS ÉTÉ VU** : linéarisation, antilinéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$, $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ et autres sommes, racines carrées sous forme algébrique, équation du second degré à coefficients complexes, racines n^{es} .

2. Primitives et intégrales

Donner à tout le monde un petit calcul d'intégrale (IPP ou changement de variable) ou simplement une recherche de primitive.

- Toute fonction continue sur un intervalle, à valeurs dans \mathbb{R} admet des primitives (admis). Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle, connaissant l'une d'entre elles.
- Brève extension des notions de continuité, dérivabilité, primitive aux fonctions à valeurs complexes. Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ ($m \in \mathbb{C}$), utilisation pour trouver des primitives de $t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ou $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- Définition de l'intégrale : si f est continue sur I (intervalle) et $a, b \in I$, on pose $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, F étant une primitive de f . Cette définition est cohérente.

Avoir le réflexe de revenir à la définition si on ne sait pas quoi faire.

- Propriétés élémentaires de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité, positivité (*), croissance. Si $a \leq b$, alors $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ (*)
- Théorème fondamental de l'intégration (*) : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- Intégration par parties (*). Changement de variable (*).
- Sur des exemples :
 Primitive de $f : t \mapsto \frac{at+b}{ct+b}$, $c \neq 0$.
 Primitive de $f : t \mapsto \frac{at+b}{t^2+ct+d}$: uniquement dans le cas où le dénominateur admet au moins une racine réelle (la fonction arctan n'a pas été vue).
- Sur un exemple, dérivation de $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ (formule pas au programme mais avoir le réflexe immédiat d'introduire une primitive).