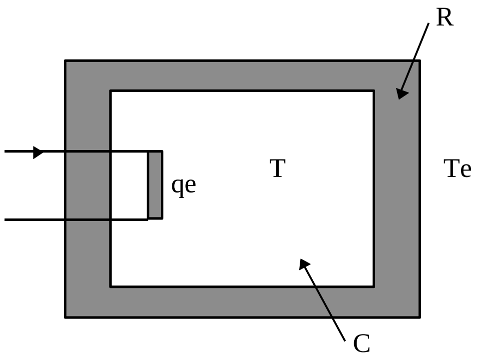
Exercice : Enceinte chauffée

On donne la modélisation simplifiée d'une enceinte chauffée :



A l'intérieure de l'enceinte fermée, la température T est supposée homogène.
La température extérieure Te est supposée constante (Te =10 °C).
C est la capacité calorifique de l'enceinte (C=2000 J/°C).
R est la résistance thermique de l'enceinte (R=0.1 °C/W).
qe est un flux de chaleur apporté à l'enceinte pour élever sa température.
qs est le flux de chaleur perdu par conduction thermique à travers les parois de l'enceinte.

Une étude thermodynamique donne les équations suivantes :

$$T(t) = Te + \frac{1}{C}\int_0^t (qe(t) - qs(t))dt \Rightarrow \frac{d(T(t)-T_e)}{dt} = \frac{1}{C}(q_e(t) - q_s(t))$$

$$qs(t) = \frac{1}{R}(T(t) - Te).$$

On note *Qs(p)* et *Qe(p)*, les transformées de LAPLACE des grandeurs *qs(t)* et *qe(t).*
Toutes les conditions initiales sont nulles ce qui signifie *T(0)=Te.*
On pose *s(t)=T(t)-Te.*

Question 1 :

Ecrire l'équation différentielle vérifiée par s(t)ayant comme entrée qe(t)
Déterminer la fonction de transfert F(p) telle que : $S(p) = F(p)Qe(p)$ *dans le domaine de LAPLACE.*
Donner ses paramètres caractéristiques après l'avoir écrite sous forme canonique.

Question 2 :

Déterminer les réponses s(t) puis T(t) à une entrée échelon de la forme :
qe(t)=qo.u(t) avec qo=500 W.
Tracer l'allure de la réponse en indiquant ses différentes caractéristiques (asymptotes à t=0 et à l'infini, temps de réponse).

On suppose que l'on a atteint la valeur finale $T(\infty)$. On coupe l'alimentation en chaleur → *qe=0 W.*

Question 3 :

Donner la réponse T(t).
Tracer son allure en indiquant ses principales caractéristiques.

Question 4 :

Déterminer la réponse T(t) à une entrée rampe de la forme : qe(t)=a.t.u(t) avec a=50 W/s.
Tracer l'allure de la réponse en indiquant ses différentes caractéristiques (asymptotes à t=0 et à l'infini).

Corrigé

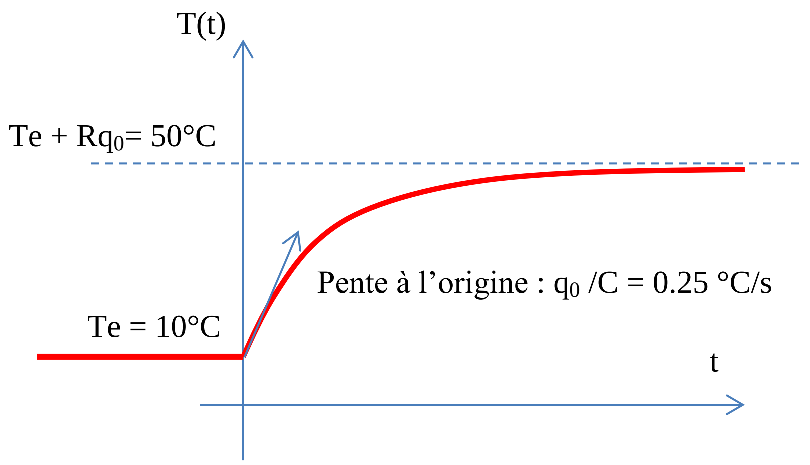
Q1 : $T(t) - Te = \frac{1}{C}\int_0^t (qe(t) - qs(t))dt$ d'où $s'(t) = \frac{1}{C}(qe(t) - qs(t)) = \frac{1}{C}\left(qe(t) - \frac{1}{R}(s(t))\right)$

D'où l'équa diff : $RCs'(t) + s(t) = Rqe(t)$ ce qui donne : $F(p) = \frac{R}{RCp+1}$ (C.I. = 0 car s(0)=T(0)-Te=0)

Fonction de transfert d'ordre 1 de gain statique K = R et de constante de temps τ = RC.

Q2 : $S(p) = \frac{R}{RCp+1}.\frac{q_0}{p} = \frac{\frac{Kq_0}{\tau}}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)p} = \frac{A}{p+\frac{1}{\tau}} + \frac{B}{p} = \frac{-Kq_0}{p+\frac{1}{\tau}} + \frac{Kq_0}{p}$ d'où $s(t) = Kq_0(1-e^{-t/\tau})u(t)$

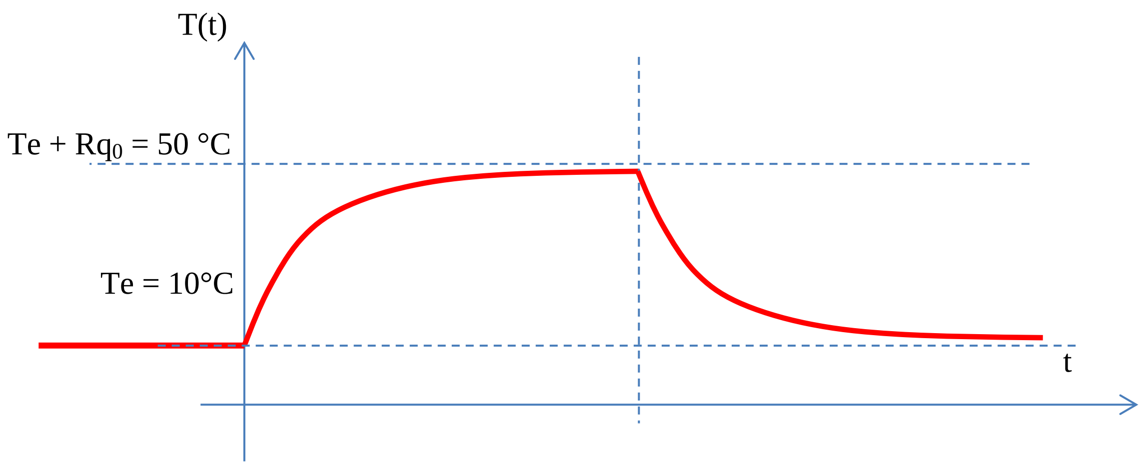
D'où $T(t) = s(t) + Te = Te + Rq_0(1-e^{-t/\tau})u(t)$



Q3 :

L'équa diff devient : $RCs'(t) + s(t) = 0 = \tau s'(t) + s(t)$. D'où $\tau(pS(p) - s'(0)) + S(p) = 0$ (C.I. non nulles. s'(0)=Rq_0)

D'où : $S(p) = \frac{\tau Rq_0}{1+\tau p} = Rq_0\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}$ ce qui donne : $s(t) = Rq_0e^{-t/\tau}$ d'où $T(t) = s(t) + Te = Te + Rq_0e^{-t/\tau}$



Q4 : $F(p) = \dfrac{R}{RCp+1}$ d'où $S(p) = \dfrac{R}{RCp+1}\cdot\dfrac{a}{p^2} = \dfrac{\dfrac{Ka}{\tau}}{\left(p+\dfrac{1}{\tau}\right)p^2} = \dfrac{A}{p+\dfrac{1}{\tau}} + \dfrac{B}{p} + \dfrac{C}{p^2} = \dfrac{Ka\tau}{p+\dfrac{1}{\tau}} + \dfrac{Ka}{p^2} - \dfrac{Ka\tau}{p}$

D'où $s(t) = Ka(t - \tau + \tau e^{-t/\tau})u(t)$