

# DS N°1 Corrigé

**Q1.** On isole la charge, en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise aux actions mécaniques (BAME) :

- de la pesanteur, modélisée par le vecteur-force  $\vec{F}_{pes \rightarrow M} = -Mg\vec{z}$  ;
- du câble, modélisée par le vecteur-force  $\vec{F}_{cab \rightarrow M} = +T\vec{z}$ .

Le PFD s'applique et on écrit (équation de résultante) :

$$M \cdot a\vec{z} = -M \cdot g\vec{z} + T\vec{z} \quad \Longrightarrow \quad T = M \cdot (a + g)$$

Puisque  $M > 0$ , la résultante  $T$  s'annule pour  $a = -g$  soit  $a = -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Pour contrôler le mouvement à tout instant (exigence 1.2), il est nécessaire que le câble reste tendu (càd  $T > 0$ ) soit  $a > -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Q2. a)** Lorsque la charge est en translation avec une accélération constante, on obtient, en primitivant deux fois :

$$v(t) = a \cdot t + C_1 \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2$$

On utilise les conditions initiales :

$$z(0) = z_0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = z_0 \quad \text{et} \quad v(0) = V_0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = V_0$$

donc  $z(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + V_0 \cdot t + z_0$ .

**b)** Par définition, on écrit :  $cons(t) = K_{pcc} F_{op}(t)$ .

**c)** Lorsque l'utilisateur relâche la poignée,  $F_{op} = 0$ . Si l'on pilote en accélération, alors  $a = K_{pcc} \cdot F_{op}$  ( $= 0$ ) : lâcher la poignée permettra de stabiliser la vitesse ( $v(t) = cste$ ) mais la charge continuera à se déplacer ( $z(t) = V_0 t + z_0$ ). Il faut imposer une consigne en vitesse  $cons(t) = v(t) = K_{pcc} \cdot F_{op}(t)$  ( $= 0$  donc  $a = 0$ ) pour que la charge s'arrête lorsque l'on relâche la poignée ( $z(t) = cste$ ).

**Q3.** Sur la figure fournie, on relève des oscillations, signe de vibrations : l'exigence id 1.4.3 n'est pas vérifiée.

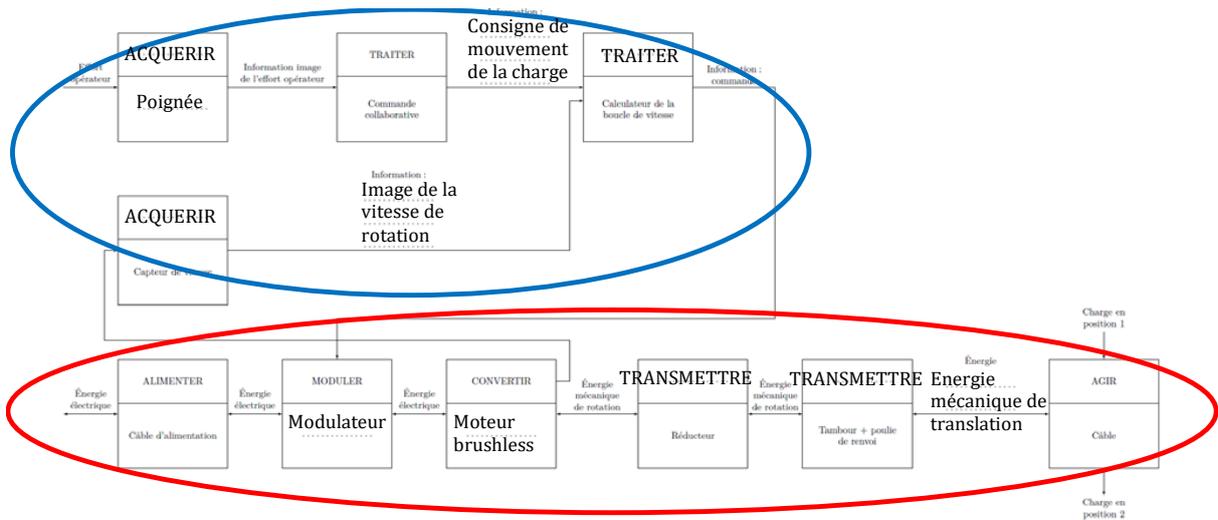
N.B. :  $v_{cons} = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $|v_{mes \ max}| \simeq 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Si l'exigence id 1.4.4 est satisfaite, alors le système peut détecter jusqu'à 40 N (en valeur absolue) d'effort de l'utilisateur. Puisqu'ici, l'essai est réalisé sur la moitié de cette charge (20 N en valeur absolue), il faut, pour discuter du respect de l'exigence id 1.4.1, transposer au cas le plus défavorable.

L'ensemble poignée et commande collaborative est proportionnel donc, avec deux fois plus d'effort (40 N au lieu de 20), la consigne sera deux fois plus grande :  $v_{cons} = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On fait l'hypothèse que le système {chaîne de motorisation asservie + palonnier et charge} est linéaire. D'après le principe de proportionnalité, la réponse à une sollicitation multipliée par deux ( $e_2(t) = \lambda e_1(t)$  avec  $\lambda = 2$ ) donnera une sortie multipliée par deux ( $s_2(t) = \lambda s_1(t)$ ). Soit ici, une valeur maximale de vitesse  $|v_{mes \ max}| \simeq 2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} > 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  : l'exigence id 1.4.1 n'est donc pas satisfaite.

**Dans toute la partie 3, l'exigence id 1.2 est vérifiée donc  $a > -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (cf. Q1).**

Q4. On en déduit :



Q5. On peut parler de système asservi car il y a une rétro-action : un capteur réalise une mesure pour comparer l'image de la sortie à l'image de l'entrée et adapter son comportement.

Q6. D'après la documentation, on a : 
$$K_m = \frac{C_m \max}{i_{\max}} = \frac{C_m \text{ nom}}{i_{\text{nom}}} = 0,9 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}.$$

Q7. Pour un tour (soit  $2\pi$  rad), la charge se déplace de  $2\pi R$  m (le périmètre du tambour). Pour un demi-tour (soit  $\pi$  rad), la charge se déplace de  $\pi R$  m (le périmètre du tambour). Donc, pour un angle quelconque  $\theta_T$  rad, on a un déplacement  $\theta_T R$ . On écrit donc :  $z(t) = R\theta_T(t) \implies \boxed{v(t) = R\omega_T(t)}$  par dérivation.

Q8. On combine cette équation avec celle donnée dans le sujet :  $v(t) = R\omega_T(t) = RK_r\omega_m(t)$ . Alors  $\boxed{K_{\text{rigide}} = RK_r}$ . A.N :  $K_{\text{rigide}} \simeq 3,15 \cdot 10^{-3}$  m.

Q9. Par définition, on a :  $\boxed{u_c(t) = K_a v_c(t)}$  et  $\boxed{u_{\text{mes}}(t) = K_c \omega_m(t)}$ .

Q10. D'après le schéma-blocs, on a  $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_{\text{mes}}(t) = K_a v_c(t) - K_c \omega_m(t) = K_a v_c(t) - \frac{K_c}{K_{\text{rigide}}} v(t)$ .

Pour obtenir  $\varepsilon = 0$ , il faut  $K_a v_c(t) = \frac{K_c}{K_{\text{rigide}}} v(t)$ . Or, si  $v = v_c$ , alors, cette relation devient :

$\boxed{K_a = \frac{K_c}{K_{\text{rigide}}}}$ . A.N :  $K_a \simeq 127 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Q11. a) b) On combine les équations :

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_m}{dt}(t) &= C_m(t) - C_r(t) \implies \frac{A}{K_{\text{rigide}}} \frac{dv}{dt}(t) = K_m i(t) - C_r(t) \implies \frac{A}{K_{\text{rigide}}} \frac{dv}{dt}(t) = K_m \varepsilon(t) - C_r(t) \\ \implies \frac{A}{K_{\text{rigide}}} \frac{dv}{dt}(t) &= K_m K_a (v_c(t) - v(t)) - C_r(t) \implies \frac{A}{K_{\text{rigide}}} \frac{dv}{dt}(t) + K_m K_a v(t) = K_m K_a v_c(t) - C_r(t) \\ \implies \boxed{\frac{A}{K_{\text{rigide}} K_m K_a} \frac{dv}{dt}(t) + v(t) &= v_c(t) - \frac{1}{K_m K_a} C_r(t)} \end{aligned}$$

c)  $\boxed{K_1 = 1}$  (sans unité),  $\boxed{K_2 = \frac{1}{K_m K_a}}$  et  $\boxed{\tau = \frac{A}{K_{\text{rigide}} K_m K_a}}$ . A.N. :  $K_2 \simeq 9 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \cdot \text{N}^{-1}$ ,  $\tau \simeq 14,25 \text{ ms}$ .

**Q12. a)**  $\tau pV(p) + V(p) = K_1 \frac{v_0}{p} - K_2 \frac{B}{p}$ .

**b)** D'où  $V(p)(\tau p + 1) = K_1 \frac{v_0}{p} - K_2 \frac{B}{p} \implies V(p) = \frac{K_1 v_0 - K_2 B}{(1 + \tau p)p}$ . Or :  $\frac{1}{(1 + \tau p)p} = \frac{a}{p} + \frac{b}{1 + \tau p}$  avec, par identification,  $a = 1$  et  $a\tau + b = 0$  soit  $b = -a\tau = -\tau$ . Ainsi :

$$V(p) = (K_1 v_0 - K_2 B) \left( \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \right) = (K_1 v_0 - K_2 B) \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{1/\tau + p} \right)$$

Par transformée inverse, on obtient :  $v(t) = (K_1 v_0 - K_2 B)(1 - e^{-t/\tau})u(t)$

**Q13.**  $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = K_1 v_0 - K_2 B$  puisque  $\tau > 0$  : la réponse converge, elle est donc bornée en réponse à une entrée bornée. C'est la définition d'un système stable.

**Q14.**  $v(t_{5\%}) = 0,95v_\infty \implies (K_1 v_0 - K_2 B)(1 - e^{-t_{5\%}/\tau}) = 0,95(K_1 v_0 - K_2 B) \implies 0,05 = e^{-t_{5\%}/\tau} \implies \ln(0,05) = -\frac{t_{5\%}}{\tau} \implies t_{5\%} = -\ln(0,05)\tau$  soit  $t_{5\%} \simeq 3\tau$  : on retrouve le résultat de cours d'un système non perturbé ; la perturbation n'influence pas le régime transitoire. A.N. :  $t_{5\%} \simeq 0,0428$  s soit 43 ms < 500 ms : le cahier des charges est validé.

**Q15.** Il n'est par contre pas parfaitement précis : son erreur statique est non nulle.  $\mu_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (v_c(t) - v(t)) = v_0 - v_\infty = v_0 - K_1 v_0 + K_2 B \simeq 0,054 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \neq 0$ .

**Q16. a)**  $pI(p) = \left( \frac{K_i}{T_i} + K_i p \right) \varepsilon(p) \implies \frac{I(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_i}{T_i p} (1 + T_i p)$ .

**b)** D'après 3.3.1, on a :

$$C_m(p) = K_m I(p) = Ap \Omega_m(p) \text{ et } \Omega_T(p) = K_r \Omega_m(p) = \frac{1}{R} V(p). \text{ Donc } V(p) = \frac{RK_r K_m}{Ap} I(p).$$

Puisque  $I(p) = \frac{K_i}{T_i p} (1 + T_i p) \varepsilon(p)$  et  $\varepsilon(p) = K_a (V_c(p) - V(p))$  (voir 3.3.1), alors

$$I(p) = \frac{K_i}{T_i p} (1 + T_i p) K_a (V_c(p) - V(p)). \text{ Finalement : } V(p) = \frac{RK_r K_m K_i}{Ap T_i p} (1 + T_i p) K_a (V_c(p) - V(p))$$

$$\implies V(p) \left[ 1 + \frac{RK_r K_m K_i K_a}{AT_i p^2} (1 + T_i p) \right] = \frac{RK_r K_m K_i K_a}{AT_i p^2} (1 + T_i p) V_c(p). \text{ D'où :}$$

$$\frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{RK_r K_m K_i K_a (1 + T_i p)}{AT_i p^2 + RK_r K_m K_i K_a (1 + T_i p)}$$

**c)** Cela équivaut à :

$$\frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{1 + T_i p}{1 + T_i p + \frac{AT_i}{RK_r K_m K_i K_a} p^2}$$

On identifie alors :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{RK_r K_m K_i K_a}{AT_i}}$  et  $m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i RK_r K_m K_i K_a}{A}}$ .

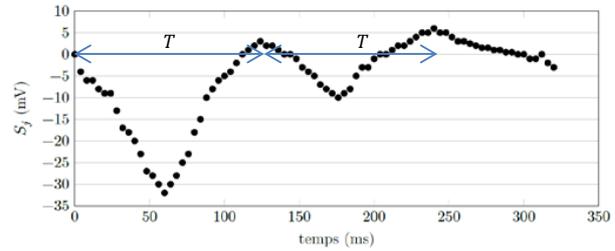
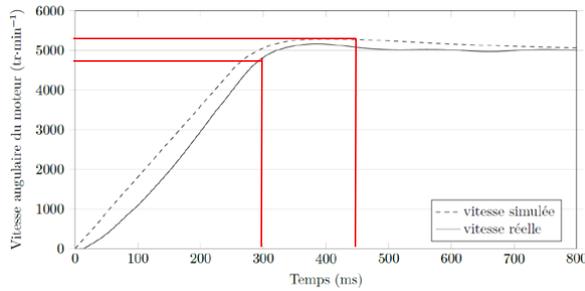
A.N. :  $m \simeq 0,67$  (sans unité).

N.B. : D'après l'abaque des temps de réponse réduits, on a  $t_{5\%} \omega_0 \simeq 5,3 \implies t_{5\%} \simeq \frac{5,3}{9,5} \simeq 240$  ms : on retrouve l'ordre de grandeur de la simulation (cf. réponse suivante).

**Q17.** Les deux courbes sont globalement proches. On dresse le tableau suivant.

Critère	Simulation	Expérimental	Écart relatif
Valeur finale	5 000 tr · min <sup>-1</sup>	5 000 tr · min <sup>-1</sup>	0 %
Temps de réponse	450 ms	300 ms	50%

On relève une différence sur la rapidité, avec un écart de 50%. C'est important, mais l'ordre de grandeur est conservé. Le modèle semble valide.



**Q18.** On observe une pseudo-période  $T$  sur la réponse de la figure 14, tel que  $T = 120$  ms. On en déduit alors la pulsation propre :  $\omega_i \simeq 52,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q19. a) b)** On transpose les différentes équations données dans Laplace sous les conditions de Heaviside et on les combine :

$$\begin{aligned}
 m_j p^2 Z_j(p) &= -k_j(Z_j(p) - Z(p) - c_j p(Z_j(p) - Z(p))) \quad \text{et} \quad F_j(p) = k_j(Z_j(p) - Z(p)) \\
 \Rightarrow \frac{m_j}{k_j} p^2 F_j(p) + m_j p^2 Z(p) &= -F_j(p) - \frac{c_j}{k_j} p F_j(p). \quad \text{Or : } S_j(p) = K_{capt} F_j(p) \quad \text{et} \quad pZ(p) = K_{rigide} \Omega_m(p) \\
 \Rightarrow -m_j p K_{rigide} \Omega_m(p) &= \frac{S_j(p)}{K_{capt}} \left( \frac{m_j}{k_j} p^2 + \frac{c_j}{k_j} p + 1 \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{S_j(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{-m_j K_{rigide} K_{capt} p}{1 + \frac{c_j}{k_j} p + \frac{m_j}{k_j} p^2}
 \end{aligned}$$

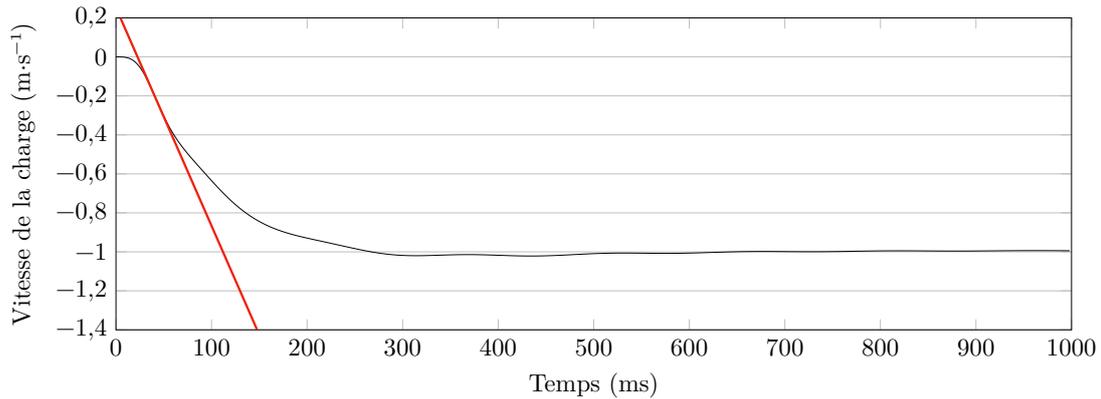
**c)** On identifie alors  $\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}$ . On a alors  $\omega_j \simeq 316 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**d)** Les deux pulsations propres  $\omega_i$  et  $\omega_j$  sont d'ordre de grandeur différents; les vibrations observées ne sont donc pas dues au fonctionnement du capteur.

**Q20.** On observe des oscillations, validant l'origine des vibrations. Leur période doit correspondre à celle de la courbe expérimentale de la figure 14 ( $T = 120$  ms). On relève  $T_1 \simeq 70$  ms pour la courbe en trait plein et  $T_2 \simeq 100$  ms pour celle en pointillés. Il faut alors retenir les valeurs de  $k = 180000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $c = 90 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$  (courbe en pointillés) pour retrouver une pseudo-période et des amplitudes similaires.

**Q21.** On étudie les différentes exigences :

- **id 1.2** il n'y a plus de fluctuation rapide de la vitesse. La pente la plus abrupte (voir figure autour de 50 ms) est d'environ  $\frac{-1,4 - 0,2}{0,14 - 0} \simeq -11,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pour -20 N donc environ  $-22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pour -40 N, ce qui ne valide pas l'exigence (cf. Q1) ;
- **id 1.4.1** la vitesse maximale pour -20 N dépasse légèrement  $-1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et donc  $-2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour un effort de -40 N si le système est linéaire. L'exigence n'est donc pas satisfaite ;
- **id 1.4.3** il n'y a plus d'oscillation de la charge, l'exigence est satisfaite.



N.B. : L'accélération a lieu pendant une durée très courte (de l'ordre de 30 ms) ; le dépassement également (de l'ordre de 200 ms) et n'existe plus en régime permanent : on peut dire que c'est acceptable, même si le diagramme des exigences n'est pas explicite à ce sujet.

**Q22.** On peut conclure sur les performances du système :

- **id 1.2** dans le cas le plus défavorable ( $M = 200 \text{ kg}$ ,  $F_{op} = -40 \text{ N}$ ), on relève une pente maximale d'environ  $-8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} > -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  : l'exigence est validée ;
- **id 1.4.1** la vitesse maximale de la charge est de  $-2,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , l'exigence n'est pas validée ;
- **id 1.4.2** différentes masses peuvent être déplacées, allant jusqu'à 200 kg : l'exigence est validée ;
- **id 1.4.3** on observe de légères oscillations sur la vitesse de la charge, l'exigence n'est pas validée mais les vibrations restent peu importantes ;
- **id 1.4.4** le système n'évolue pas pour un effort de  $-0,2 \text{ N}$ , l'exigence n'est pas validée (valeur incluse).

N.B. : En multipliant l'effort par deux (de  $-20 \text{ N}$  à  $-40 \text{ N}$ ), on constate que les courbes tendent à se stabiliser vers des valeurs à convergence multipliées elles aussi par deux ( $-1 \text{ m/s}$  à  $-2 \text{ m/s}$ ) : en régime permanent, le comportement semble linéaire. En revanche, sur les régimes transitoires (temps de réponse...), les courbes ne sont pas similaires : le système n'est donc pas linéaire. Cela remet en cause l'hypothèse faite en Q3.