MPSI

Programme de colle - semaine 04 du 07/10/2024 au 13/10/2024

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1. **Les complexes**
   - Notions de base sur les complexes (opérations, forme trigonométrique, angle moitié)
   - Transformations trigonométriques (linéarisation, antilinéarisation, transformation de somme en produit).
     Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ (transformation de ces sommes en une expression réelle explicite).
     Pour toutes ces transformations, il n'y a pas d'expression explicite à connaître, mais la méthode doit être connue.
   - Racines carrées d'un complexe : définition et calcul (sous forme algébrique) $(*)$. Tout complexe non nul a deux racines carrées opposées.
     Équation du second degré à coefficients complexes.
   - Racines n^{es} d'un complexe ($n \in \mathbb{N}^*$) : définition et expression $(*)$.
     Tout complexe non nul admet exactement n racines n^{es}.
     Racines n^{es} de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$.
   - **À titre indicatif** (vu en cours mais ne pas interroger dessus) : Utilisation des complexes en géométrie.
     Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$. Caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité.
     Transformation $z \longmapsto az+b$ ($a \in \mathbb{C}^*$), interprétation géométrique. Cas particuliers $a=1$, $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

2. **Primitives et intégrales**
   - Questions de cours sur le programme précédent (positivité, valeur absolue de l'intégrale, définition par primitive, théorème fondamental, etc) : pas de démonstration, mais on attend un énoncé clair.
   - Exercices sur le programme précédent, en commençant par quelque chose de simple (par exemple, donner un changement de variable).

1 Exercices

Les exercices suivants ont été cherchés et peuvent être posés (tout ou partie) comme premier exercice (certains incluent une question de cours).
Si l'exercice s'éternise trop et n'est manifestement pas compris/travaillé, passer à autre chose !

1. **Banque CCINP exercice 84**
   a) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
   c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ces nombres sont réels.

2. **Banque CCINP exercice 89**
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
   a) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

b) On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$.

   Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (faire une IPP).