

DS N°1

- Durée 2 heures
- Calculatrices autorisées
- Aucun document autorisé
- Le devoir comporte un petit exercice et un problème
- Les questions à partir de la question 15 du problème sont en bonus. Elles ne seront abordées qu'après avoir traité toutes les questions précédentes
- Vous disposez des annexes sur les transformées de Laplace et la décomposition en éléments simples en fin de sujet.

Exercice: Evaluation de performances (temps conseillé : 10 min)

Sur le graphique du document réponses sont représentées la consigne et la réponse (grandeurs sans dimension) d'un système linéaire continu invariant asservi.

- Q1.** *Evaluer les performances du système (erreur statique, temps de réponse à 5% et 1er dépassement en pourcentage de la valeur à convergence). Vous réaliserez les tracés nécessaires sur le document réponses*
- Q2.** *Donner la valeur du gain statique du système étudié. Ce système peut-il être modélisé par une fonction de transfert d'ordre 1 (ou une équation différentielle de degré 1) ? justifier la réponse.*

Problème: Hot Bird 4 (inspiré de X Ens MP 99)

1.Mise en situation

Hot Bird est le principal réseau de satellites de télédiffusion et radiodiffusion européen, avec plus de 1100 chaînes de télévision. Il est géré par la société Eutelsat et couvre plus de 123 millions de foyers.

Ces satellites en position géostationnaire émettent leurs signaux en direction du continent européen.

Leur co-positionnement à 13° Est permet de concentrer la plus grande quantité de chaînes TV. Elles sont reçues avec une simple antenne parabolique pointée dans une seule direction. La précision du positionnement du satellite a une influence directe sur la zone de couverture.



Figure 1 : Satellite et couverture réseau Hot Bird

Cette étude s'intéresse plus particulièrement au satellite Hot Bird 4. Le 28 février 1998, à 01h28 GMT, le lanceur A42P (Ariane 4 équipé de 2 propulseurs à poudre, Vol 106) a procédé à la mise sur orbite de transfert (appelée GTO pour Geostationary Transfer Orbit) du satellite Hot Bird 4 (de masse initiale 2913 kg).

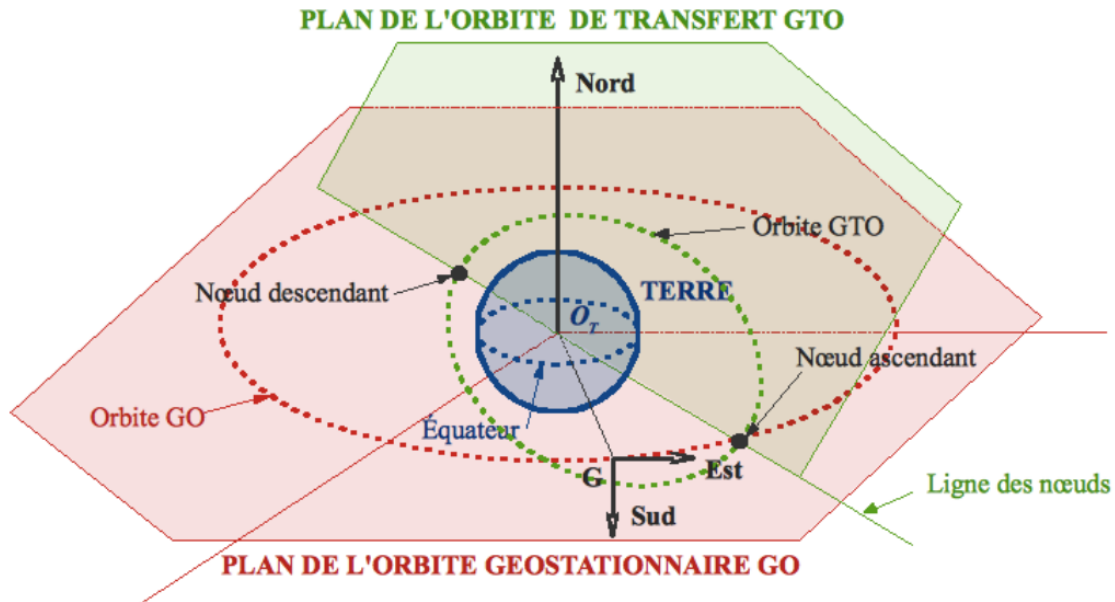


Figure 2 : Définition des orbites GTO et GO

Depuis cette orbite GTO (voir figure 2), le satellite évolue de manière autonome grâce à un ou plusieurs allumages de son moteur d'apogée, vers son orbite géostationnaire GO (Geostationary Orbit). Ce moteur, installé au cœur du satellite, développe une poussée de 490 N. Après le déploiement des panneaux solaires et des antennes de réception, sur l'orbite GO, la mise en position du satellite à la longitude 13° Est ($\pm 0.05^\circ$) est assurée par l'allumage de propulseurs. Ceux-ci, répartis judicieusement sur les faces du satellite, développent chacun une poussée de 10 N (voir figure 3).

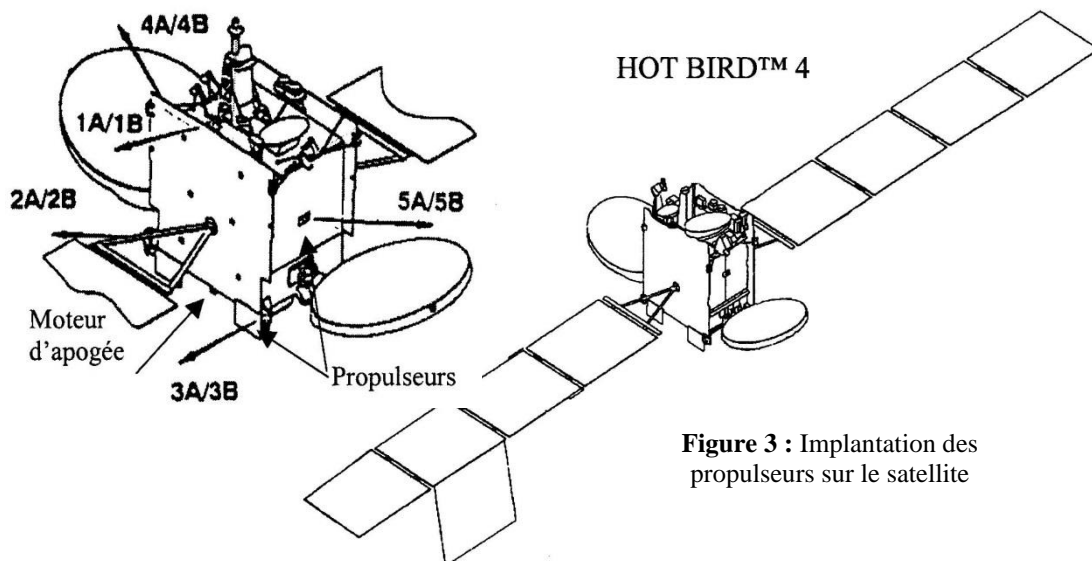


Figure 3 : Implantation des propulseurs sur le satellite

Ultérieurement, sur l'orbite GO, le maintien à poste du satellite Hot Bird 4 est assuré par les propulseurs. La durée d'utilisation du satellite dépend directement de la quantité de propergols disponible après le transfert sur l'orbite GO. Il est donc primordial de minimiser la consommation de carburant nécessaire au transfert de GTO vers GO. Dès l'injection de Hot Bird 4 sur l'orbite GTO, le Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite, appelé SCAO, gère l'évolution du satellite durant ces différentes phases de vie.

L'approche retenue est de considérer que la liaison Hot Bird 4 – Terre est une liaison à six mobilités : 3 rotations notées θ_R (roulis), θ_T (tangage), θ_L (lacet), ainsi que 3 translations.

Le **mouvement orbital** traduit le mouvement du centre d'inertie du satellite par rapport à un référentiel Galiléen.

L'**attitude** est l'orientation du satellite autour de son centre d'inertie ; l'évolution de l'attitude au cours du temps peut être découplée du mouvement orbital du satellite.

L'attitude du satellite se définit par les 3 positions angulaires que sont les angles de Lacet θ_L , de roulis θ_R , et de tangage θ_T définis par rapport à un repère de consigne noté R_C

Objectif : Cette étude propose de vérifier les performances du SCAO en référence aux niveaux des critères associés aux exigences données dans l'extrait de cahier des charges fonctionnel défini ci-après.

2.Présentation du système de contrôle d'attitude et d'orbite

2.1.Les modes de fonctionnement du SCAO

Le fonctionnement du SCAO se fait selon 4 modes distincts :

- Mode de transfert :
 - Transfert de l'orbite GTO vers l'orbite géostationnaire GO et mise en place du satellite à la longitude de stationnement provisoire ;
 - Mise en place du satellite à la longitude de stationnement définitive.
- Mode normal :
 - Vérification du fonctionnement correct des équipements de Hot Bird 4 ;
 - Mise en service du satellite Hot Bird 4 en assurant la mise à poste et le maintien à poste indépendamment des perturbations extérieures pouvant intervenir.
- Mode de secours :
 - Prise de décision en cas de perte de l'attitude du satellite.
- Mode de mise en orbite cimetière :
 - Evacuation de l'orbite géostationnaire pour fin de durée de vie.

2.2.Extrait du Cahier des charges fonctionnel du SCAO

Une analyse partielle des exigences nécessaires à l'étude a permis d'élaborer l'extrait du cahier des charges figure 4 page suivante.

2.3.Organisation fonctionnelle du SCAO

Le SCAO installé sur le satellite Hot Bird 4 est composé des éléments suivants :

- des capteurs IRES (Infra Red Earth Sensor) mesurent le mouvement orbital et l'attitude du satellite. Le signal produit par ces capteurs est proportionnel à l'effet thermique reçu du rayonnement infrarouge distinct entre la Terre et l'espace. Les performances sur la mesure d'attitude, intrinsèques aux capteurs, sont de l'ordre de $0,1^\circ$ à $0,04^\circ$;
- des comparateurs comparent les mesures issues des capteurs IRES avec les attitudes et mouvements orbitaux de consigne imposés depuis la Terre ;
- les ordres issus de ces comparateurs permettent au calculateur/correcteur de calculer les consignes de commande des actionneurs ;
- les actionneurs (propulseurs) créent un couple afin de modifier l'attitude et le mouvement orbital du satellite ;
- des perturbations liées à l'environnement appliquent un couple sur le satellite qui peuvent modifier l'attitude et les mouvements de celui-ci ;
- l'ensemble satellite voit son attitude et ses mouvements orbitaux impactés par les actions mécaniques résultant des propulseurs et des perturbations extérieures.

Exigences	Critères	Niveaux
Atteindre l'orbite GO depuis la séparation du lanceur en mode de transfert	Minimiser la consommation de propergols afin d'augmenter la durée de vie	Masse de propergols consommée pour une variation de vitesse ΔV donnée : $- m_p = m_0 \left[1 - e^{\frac{-\Delta V}{g_0 I_{sp}}} \right]$ Caractéristique du moteur d'apogée : $\frac{\text{erreur en } \Delta V}{\Delta V} = \text{constante}$
Contrôler l'orbite depuis la mise en poste en mode normal	Maintenir le centre d'inertie du satellite dans la fenêtre de positionnement même en cas de défaillance du réseau de propulseurs.	Position : $- \text{longitude } l_s = 13^\circ \pm 0,05^\circ$ $- \text{latitude } \lambda_s = 0^\circ \pm 0,05^\circ$
Maintenir l'attitude souhaitée en mode normal	Asservir les positions angulaires $\theta_L, \theta_T, \theta_R$ du satellite par rapport au repère de consigne \mathcal{R}_C , quelles que soient les perturbations extérieures	Précision de pointage $- 0 \leq \theta_T \leq 0,05^\circ$ $- 0 \leq \theta_R \leq 0,05^\circ$ $- 0 \leq \theta_L \leq 0,3^\circ$ Amortissement : $D_1^{\%} < 50\%$ Rapidité : $t_{5\%} \leq 20s$
	Contrôler l'attitude du satellite depuis la Terre en mode normal par l'intermédiaire des variables d'état θ_T, θ_R et de leurs dérivées $\dot{\theta}_T, \dot{\theta}_R$	
	Maîtriser le couplage de θ_T et θ_R	
Modifier l'attitude du satellite si sa survie le requiert en mode de secours	Temps de réponse inférieur à $30min$	Fonction non étudiée dans ce document
S'adapter à l'environnement extérieur en mode normal	Les perturbations agissant sur le satellite sont dues à : la non sphéricité de la Terre, la pression de radiation solaire, l'influence luni-solaire	Les couples maximums pris en compte ont les valeurs suivantes : $- C_{Lmax} = 2.10^{-5} N.m$ $- C_{Tmax} = 2.10^{-5} N.m$ $- C_{Rmax} = 2.10^{-5} N.m$

Figure 4 : Extrait du cahier des charges du SCAO

L'organisation du S.C.A.O. installé sur HOT BIRD peut être modélisée par le diagramme de définition de blocs et le diagramme de blocs internes ci-dessous.

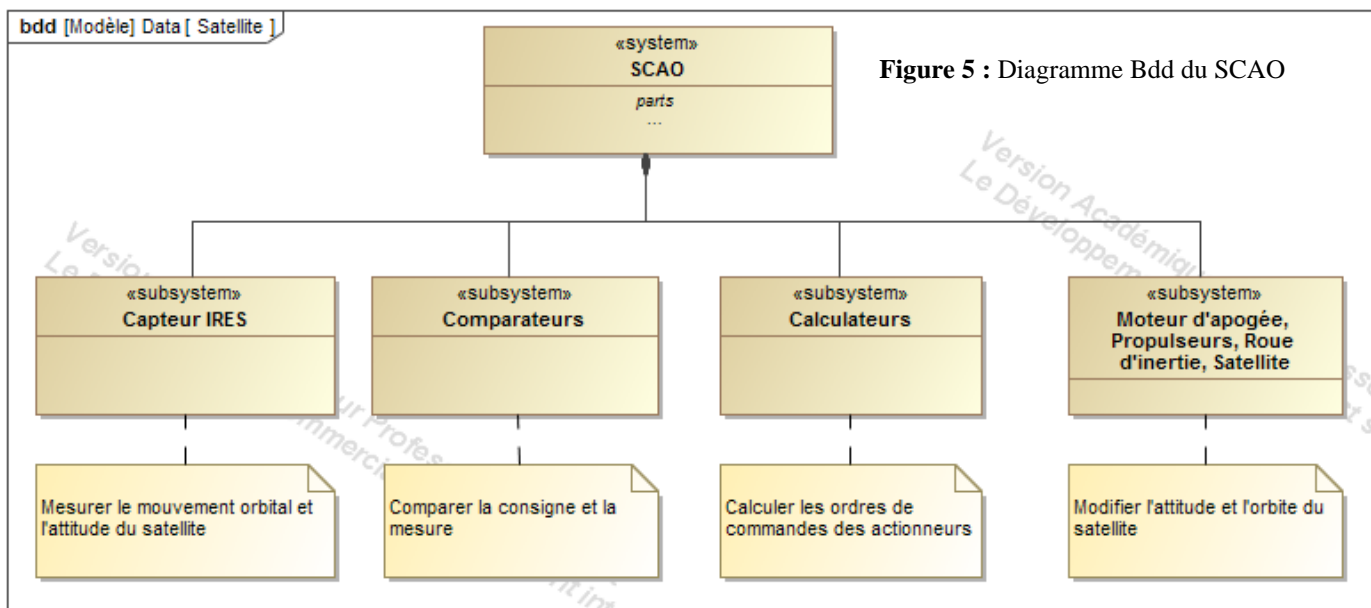


Figure 5 : Diagramme Bdd du SCAO

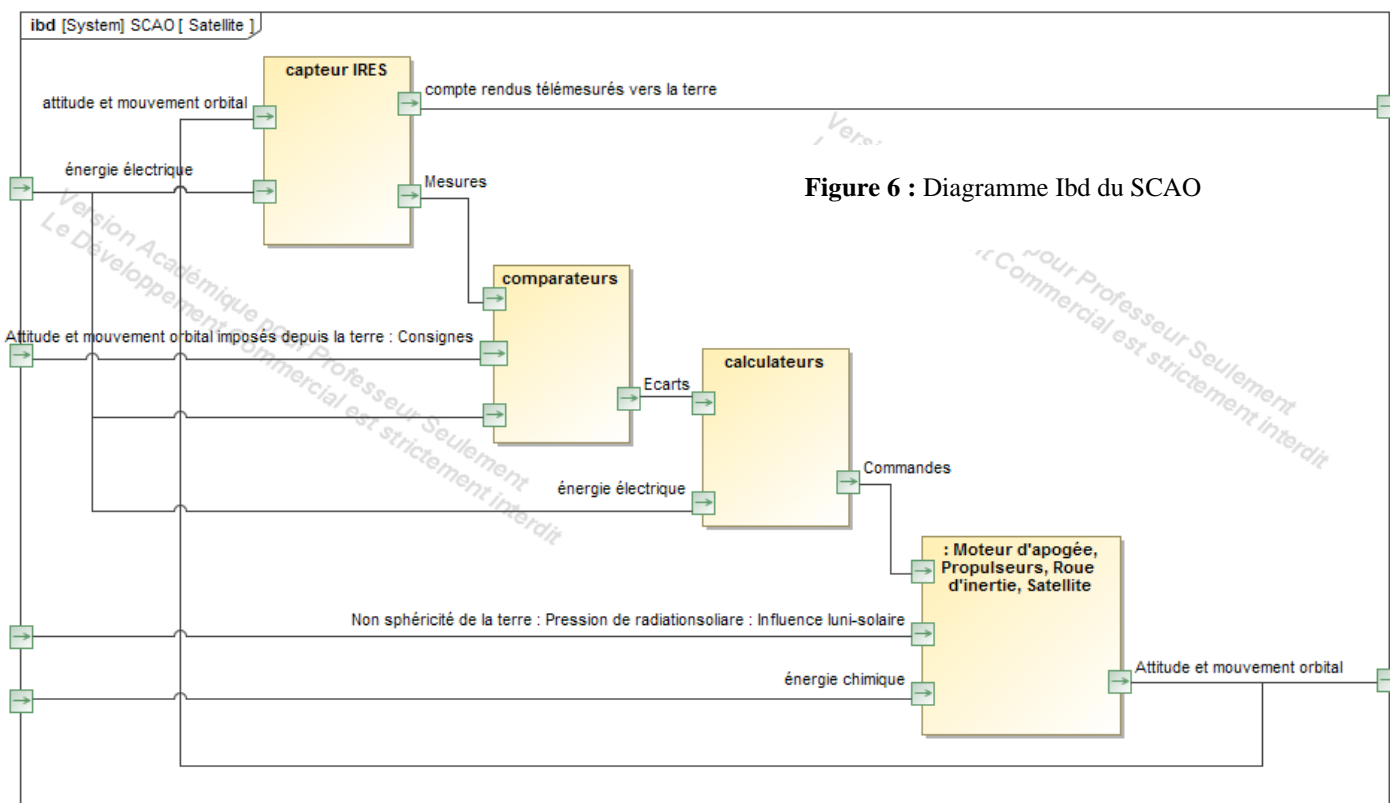


Figure 6 : Diagramme Ibd du SCAO

3. Etude de la fonction : Maintenir l'attitude souhaitée du satellite en mode normal.

Objectif : L'objet de cette étude est de vérifier la capacité de la solution préconisée par les ingénieurs de la société Matra Marconi Space à assurer le maintien de l'attitude du satellite HotBird 4 en mode normal.

La fonction « mise en position » de cette liaison est assurée par deux réseaux (A et B) de 7 propulseurs chacun (numérotés de 1 à 7) positionnés conformément à la figure 7 et dont le paramétrage est donné figure 8.

On considère que le satellite HotBird 4 a atteint sa position de stationnement EST : $\lambda_s = 0^\circ$ et $l_s = 13^\circ$. Le centre d'inertie du satellite est donc fixe dans le repère terrestre R_T .

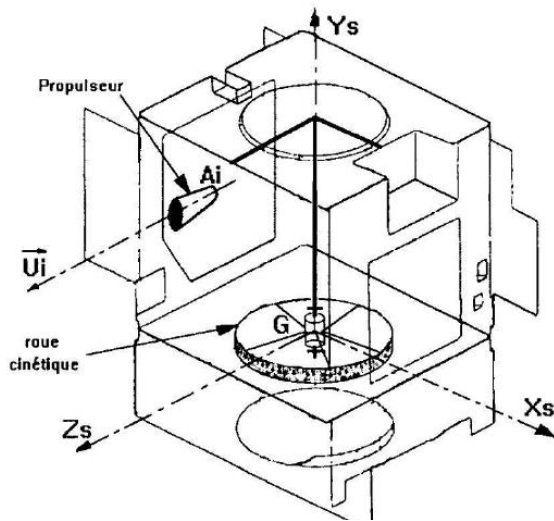


Figure 7 : emplacement d'un propulseur

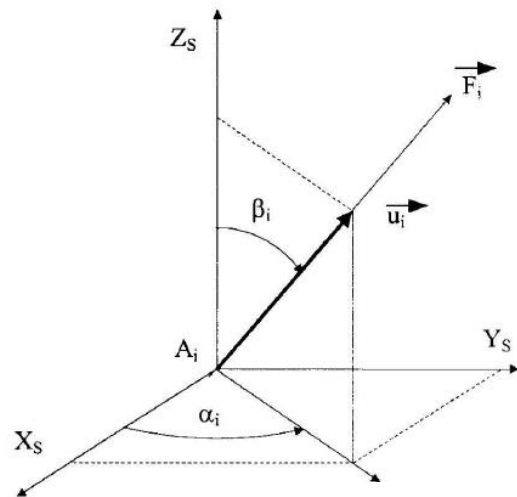


Figure 8 : Repère associé au satellite et paramètres d'orientation d'un propulseur

3.1. De la difficulté d'orienter un satellite

On se limite à l'étude du tangage mesuré par l'angle θ_T .

Le couple moteur C (en Newton mètre) c'est-à-dire l'action mécanique qui entraîne la rotation du satellite dans un plan, d'un angle θ_T , autour du centre de gravité G , est provoqué par la réaction à l'émission de gaz des propulseurs latéraux. Le satellite, dans le vide, ne subit pas de frottement. Les couples de perturbation étant très faibles, on les suppose négligeables.

Étudions le système satellite seul, c'est à dire sans système de contrôle. L'entrée est le couple $C(t)$ exercé par l'action des propulseurs et la sortie est la position angulaire $\theta_T(t)$.

Le moment d'inertie du satellite (supposé constant) par rapport à l'axe de rotation est J (en kg.m^2). Ce moment d'inertie prend en compte la masse et les dimensions du satellite. Il traduit par la 2^{ème} loi de Newton la difficulté de mettre en rotation le satellite.

L'équation différentielle (2^{ème} loi de Newton) qui lie l'entrée et la sortie est alors : $J \frac{d^2 \theta_T(t)}{dt^2} = C(t)$.

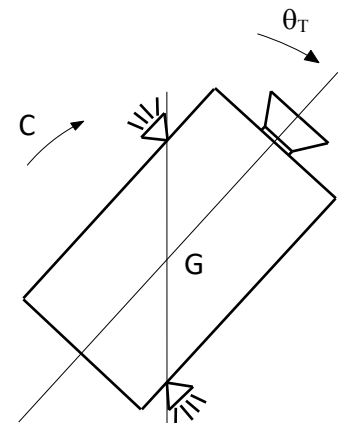


Figure 9 : modèle de mise en rotation du satellite

Q1. On suppose les conditions initiales nulles. Après transformation par Laplace de l'équation différentielle ci-dessus, donner l'expression de la fonction de transfert : $G(p) = \frac{\theta_T(p)}{C(p)}$.

Q2. On suppose le satellite au repos et on émet un bref jet de gaz par deux propulseurs comme sur la figure 9 ; le couple peut alors être considéré comme une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Exprimer $\theta_T(t)$ par transformation de Laplace inverse de $\theta_T(p)$.

Q3. Pour orienter correctement le satellite, on doit le faire tourner de θ_0 radians. L'impulsion $C(t)$ nécessaire est-elle aisément réalisable et pilotera-t-elle le satellite avec précision ?

Un asservissement angulaire s'impose donc pour la maîtrise de l'attitude du satellite

Q4. En vous aidant des descriptions précédentes, compléter le schéma-bloc du document réponses. Préciser l'unité des grandeurs entrantes et sortantes du comparateur.

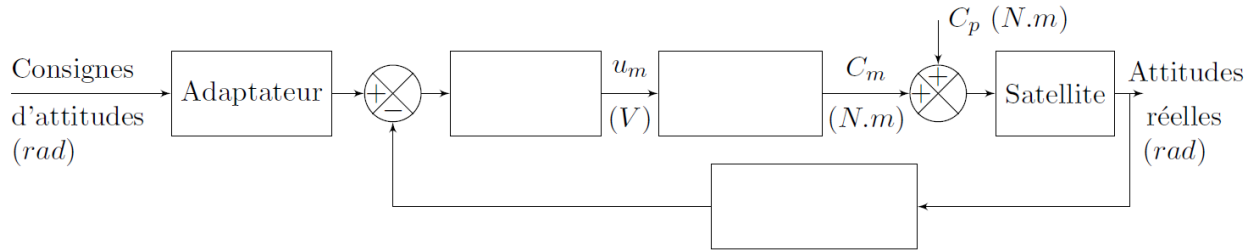


Figure 10 : Schéma blocs fonctionnel de l'asservissement en attitude à compléter sur le document réponses

3.2. Contrôle d'attitude autour de l'axe de tangage : commande sans retour d'état

Objectif : L'objectif de cette partie est de montrer qu'une commande ne prenant en compte que la mesure de l'angle de tangage ne convient pas.

On adopte la modélisation suivante des composants de l'axe de tangage :

- Le comportement dynamique, sur l'axe de tangage, du système matériel $E = \{\text{Satellite } S + \text{Roue Cinétique } R\}$ (voir figure 7) est modélisé par l'équation : $J_s \ddot{\theta}_T(t) = C_m(t) + C_p(t)$ avec C_p couple perturbateur et C_m le couple exercé par les propulseurs. J_s (constante > 0) est le moment d'inertie du système isolé E . $\ddot{\theta}_T(t) = \frac{d^2}{dt^2} \theta_T(t)$ est l'accélération angulaire en tangage en rad/s^2 .
- Les propulseurs sont modélisés par un gain pur K_2 tel que $C_m(t) = K_2 \cdot u_m(t)$
- On note K_c le gain du capteur angulaire et K_a celui de l'adaptateur tel que $u_c(t) = K_a \cdot \theta_c(t)$ (avec $\theta_c(t)$ la consigne angulaire d'entrée). Ces composants sont modélisés par des gains purs.
- Le correcteur qui fournit la tension $u_m(t)$ à partir de l'écart entre la tension de consigne et la tension délivrée par le capteur $u_{capt}(t)$, est modélisé par la fonction de transfert $C(p)$

Les positions du satellite en roulis, tangage et lacet sont celles de la mission. Ces conditions initiales sont supposées nulles dans toute la suite du problème.

Le schéma-bloc correspondant au modèle retenu pour le tangage est présenté sur la figure suivante (les unités des grandeurs sont précisées entre parenthèses).

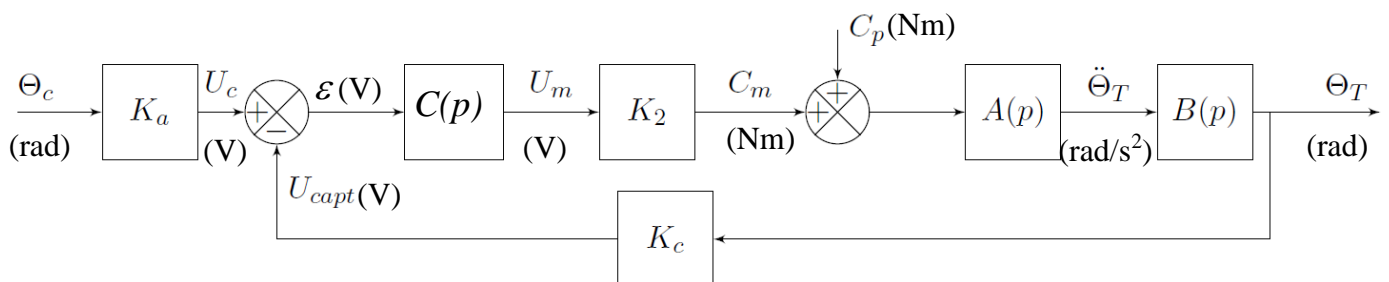


Figure 11 : Schéma-bloc retenu pour le modèle de contrôle d'attitude (remarque : $\ddot{\theta}_T$ peut s'écrire $p^2 \theta_T(p)$)

Q5. Après avoir traduit les deux équations différentielles de l'énoncé ci-dessus, exprimer les fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$ en fonction de p et J_s .

Pour que la structure bouclée étudiée soit un asservissement angulaire **il faut que lorsque la sortie $\theta_T(t)$ atteigne la valeur de l'entrée $\theta_c(t)$, le signal $\varepsilon(t)$ soit nul.**

- Q6.** A partir du schéma blocs de la figure 11, exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $\theta_c(p)$ et $\theta_T(p)$, puis donner la relation simple entre K_a et K_c pour que ce schéma blocs soit un asservissement de la valeur de sortie $\theta_T(t)$ à la valeur d'entrée $\theta_c(t)$?
- Q7.** Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H(p) = \frac{\theta_T(p)}{\theta_c(p)}$ en considérant le système non perturbé (l'entrée en perturbation est nulle $C_p(p) = 0$) et corrigé par une action proportionnelle (le correcteur est un gain pur $C(p) = K_1$). On donnera le résultat sous la forme canonique : $\frac{1}{\alpha p^2 + 1}$ en précisant la constante α et prenant $K_a = K_c$.

La stabilité d'un système peut être étudiée en cherchant les racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée (ici $H(p)$) du système. Un système sera considéré **stable** si soumis à une entrée bornée (un échelon unitaire par exemple) il fournit une sortie bornée à valeur asymptotique constante. Les **racines du dénominateur** de sa fonction de transfert sont dans ce cas à **partie réelle strictement négative**.

- Q8.** Donner l'expression des racines du dénominateur de $H(p)$. L'asservissement angulaire étudié est-il stable en supposant l'ensemble des gains des fonctions de transfert strictement positifs ?

On constate donc qu'une commande ne prenant en compte que la mesure de l'angle de tangage ne convient pas. A une entrée en échelon va correspondre une sortie purement oscillante.

3.3. Contrôle d'attitude autour de l'axe de tangage : commande à retour d'état

La solution retenue pour stabiliser l'asservissement est une commande à retour d'état prenant en compte en plus de la mesure de la position, la mesure de la vitesse angulaire de tangage $\dot{\theta}_T(t) = \frac{d}{dt} \theta_T(t)$. Cette solution est décrite sous forme de schéma-blocs (voir figure 12).

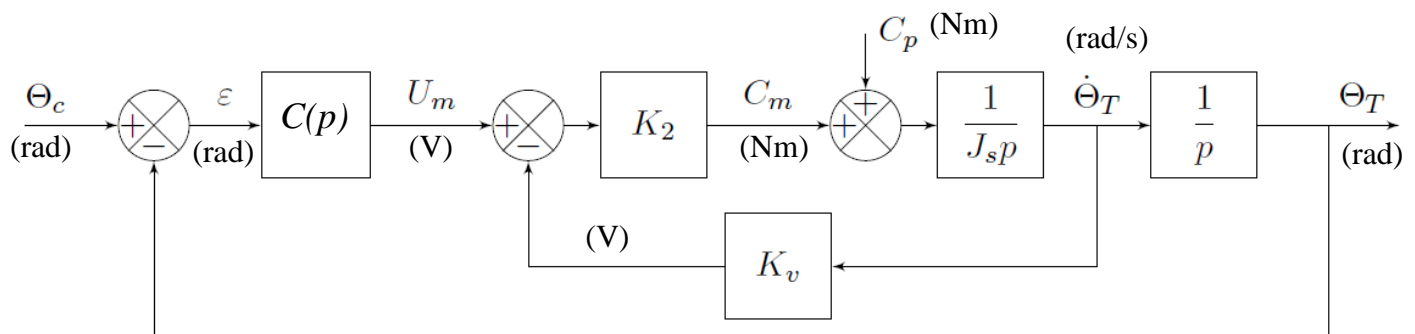


Figure 12 : Schéma-bloc de l'asservissement en tangage (remarque : $\dot{\theta}_T$ peut s'écrire $p\theta_T(p)$)

On pose dans un premier temps $C(p) = K_1$ le coefficient de correction proportionnelle. K_2 et K_v sont des gains purs donc des constantes.

3.3.1. Etude du système non perturbé

On suppose dans cette partie que le système n'est pas perturbé : $C_p(p) = 0$.

- Q9.** Donner l'expression de la fonction de transfert de la boucle de vitesse interne $H_i(p) = \frac{p \cdot \theta_T(p)}{u_m(p)}$ ($p \cdot \theta_T(p)$ est la transformée de Laplace de $\dot{\theta}_T(t)$). Donner sa forme canonique et préciser ses caractéristiques (ordre, classe, gain statique noté K_i et constante de temps notée τ_i).

Suite à un essai, on donne figure 13, la courbe de réponse indicielle de $\dot{\theta}_T(t)$ pour une entrée échelon unitaire $u_m(t) = I.u(t)$.

Q10. Retrouver (en utilisant les annexes si besoin) le résultat du cours concernant la réponse indicielle du système du premier ordre modélisé : $\dot{\theta}_T(t) = K_i(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}})u(t)$

Q11. Utiliser la figure du document réponses (faire apparaître les traits de construction nécessaires) pour donner les valeurs numériques des caractéristiques K_i et τ_i .

On note $H_{bf}(p) = \frac{\theta_T(p)}{\theta_c(p)}$ la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement angulaire en tangage.

Q12. Donner l'expression de $H_{bf}(p)$ sous la forme canonique suivante : $\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$. En déduire

l'expression de ses constantes caractéristiques (gain statique K , pulsation propre ω_0 et coefficient d'amortissement ξ) en fonction de K_1 , K_i et τ_i :

La réponse indicielle du système à une entrée $\theta_c(t) = 0,01.u(t)$ ($u(t)$ échelon unitaire) est donnée ci-après, figure 14. Elle correspond au meilleur réglage du correcteur K_1 .

Q13. Caractériser la précision en régime permanent de ce système asservi lorsque la perturbation est nulle et conclure sur la validité du cahier des charges concernant ce critère. Faire apparaître les traits de construction nécessaires sur le document réponses.

Q14. Caractériser les performances de rapidité (temps de réponse à 5%) et d'amortissement (premier dépassement relatif de la valeur asymptotique $d_1\%$) de ce système asservi lorsque la perturbation est nulle et conclure sur la validité du cahier des charges. Faire apparaître les traits de construction nécessaires sur le document réponses.

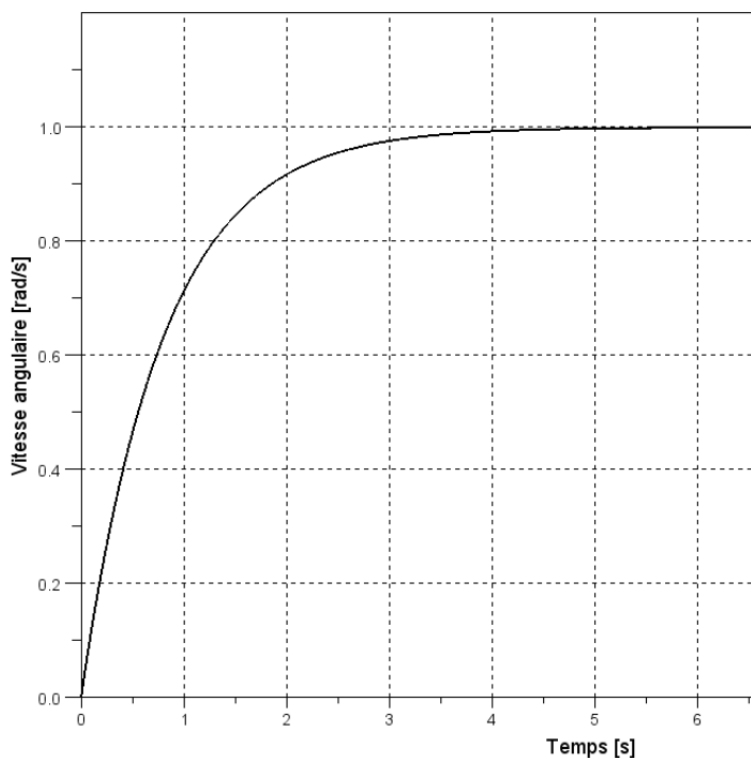


Figure 13 : Courbe expérimentale de la réponse indicielle de $\dot{\theta}_T(t)$

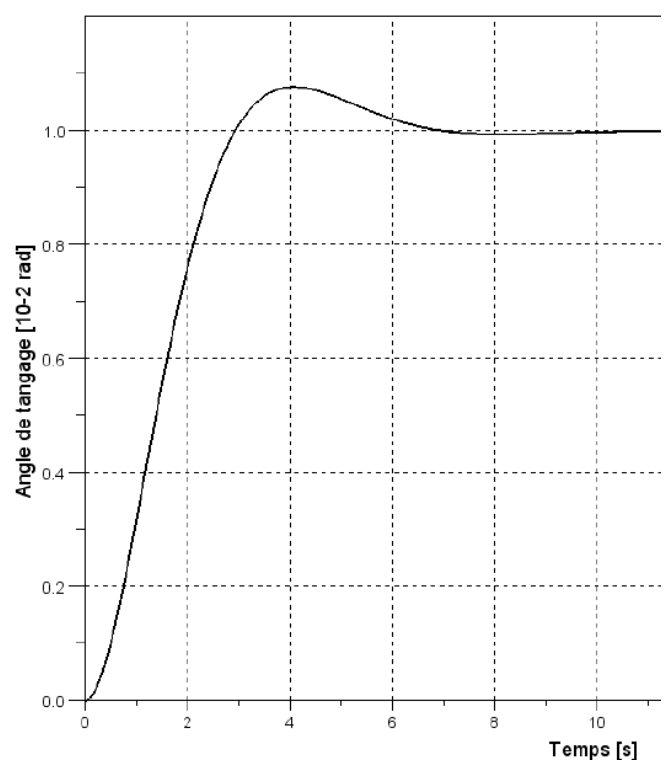


Figure 14 : Courbe expérimentale de la réponse indicielle de $\theta_T(t)$

Q15. (Question Bonus) En utilisant la figure 14 et les abaques des dépassements transitoires et du temps de réponse réduit (cf. figure 15 du document réponses), proposer des valeurs numériques du facteur d'amortissement ξ et de la pulsation propre non amortie ω_0 , ainsi que la valeur du gain statique K . Faire apparaître les traits de construction nécessaire sur le document réponses.

3.3.2. Prise en compte de la perturbation (partie Bonus)

On suppose maintenant que la perturbation $C_p(p)$ est non nulle. Le système est considéré comme ayant 2 entrées et une sortie. On écrit alors la sortie sous la forme : $\theta_T(p) = H_c(p) \cdot \theta_c(p) + H_r(p) \cdot C_p(p)$. La fonction de transfert $H_c(p)$ est celle du système en suivi de consigne. La fonction de transfert $H_r(p)$ est celle du système en régulation.

Q16. Donner, à partir du schéma-blocs de la figure 12, les expressions de $H_c(p)$ et de $H_r(p)$ en fonction des différentes constantes définies. Vous pouvez procéder par superposition ou par traduction du schéma-blocs sous forme d'équations.

On considère que l'on peut modéliser $\theta_c(t)$ par un échelon d'amplitude constante θ_0 et la perturbation $C_p(t)$ par un échelon d'amplitude constante $-C_0$.

Q17. Donner l'expression dans le domaine symbolique des fonctions $\theta_c(p)$ et $C_p(p)$ à l'aide de la description précédente.

Q18. Donner l'expression de la valeur finale notée $\theta_{T\infty}$ de la réponse du système soumis à ces deux signaux.

Q19. Calculer la valeur que doit prendre le produit $K_2 K_1$ pour respecter le critère de précision du cahier des charges (écart de mise en position).

Pour rendre le système moins sensible aux perturbations, on envisage maintenant un correcteur de la forme :

$$C(p) = \frac{K_1}{p}$$

Q20. Déterminer la nouvelle valeur finale notée $\theta_{T\infty}$ de la réponse du système. Conclure sur l'utilité de ce type de correcteur.

ANNEXES

Quelques Transformées de Laplace au cas où

$\underline{f}(t)$	$F(p)$
$f(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p)$ avec C.I. = 0
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$

Théorème de la valeur initiale : (si la limite existe) :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$$

Théorème de la valeur finale : (si la limite existe) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

COMPLEMENT DE COURS
décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Ce complément de cours présente quelques techniques de calcul de la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles rencontrées dans le cours SLCI. L'objectif de la décomposition est de transformer une fraction rationnelle en une somme de fractions rationnelles simples dont on pourra facilement déterminer la transformée de Laplace inverse (voir chapitre 4 du cours SLCI).

On se limitera volontairement aux fractions rationnelles $\frac{N(p)}{D(p)}$ telles que :

- $\deg N(p) < \deg D(p)$
- $D(p) = \prod_i (p - p_i)$ avec
 - soit p_i réels
 - soit un ou plusieurs p_i complexes. On considère alors le ou les complexes conjugués $\overline{p_i}$. On a alors $(p - p_i)(p - \overline{p_i}) = p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2$ avec $p_i = \alpha + i\beta$. $D(p)$ est alors un produit de polynômes réels de $\deg \leq 2$.

Etude des cas typiques

Etape 1 : forme de la décomposition

➤ Cas n°1 : $D(p)$ n'a que des racines simples réelles :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_i (p - p_i)} = \sum_i \frac{A_i}{p - p_i} \quad \text{Ex 1 : } S(p) = \frac{2p+1}{(p+4)(p+1)}$$

➤ Cas n°2 : $D(p)$ n'a que des racines réelles dont une multiple :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_k)^n \prod_{i \neq k} (p - p_i)} = \sum_{i \neq k} \frac{A_i}{p - p_i} + \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{(p - p_k)^j} \quad \text{Ex 2 : } S(p) = \frac{3p^2 + 2p + 1}{(p+2)^3(p+3)}$$

➤ Cas n°3 : $D(p)$ a une racine complexe :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_k)(p - \overline{p_k}) \prod_{i \neq k} (p - p_i)} = \sum_{i \neq k} \frac{A_i}{p - p_i} + \frac{Bp + C}{p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2} \quad \text{Ex 3 : } \frac{1}{(p^2 + 2p + 5)(p+1)}$$

Etape 2 : détermination de coefficients

➤ Par identification : on recompose la fraction rationnelle à partir de la forme décomposée puis on identifie avec la fraction d'origine.

➤ Par calcul de limite (quand cela est possible) : $A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{N(p)}{D(p)} (p - p_i)$

➤ Par utilisation de valeurs particulières : 0, 1, -1 ...

Exemple 1 :

$$S(p) = \frac{2p+1}{(p+4)(p+1)} = \frac{A}{p+4} + \frac{B}{p+1}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -4} (p+4).S(p) = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad B = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1).S(p) = -\frac{1}{3}$$

$$S(p) = \frac{7/3}{p+4} + \frac{-1/3}{p+1}$$

Exemple 2 :

$$S(p) = \frac{3p^2+2p+1}{(p+2)^3(p+3)} = \frac{A}{(p+2)^3} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+3}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2)^3.S(p) = 9 \quad \text{et} \quad D = \lim_{p \rightarrow -3} (p+3).S(p) = -22$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = 0 = C + D \Rightarrow C = 22$$

$$p=0 : \frac{1}{24} = \frac{9}{8} + \frac{B}{4} + \frac{22}{2} - \frac{22}{3} \Leftrightarrow B = -19$$

$$S(p) = \frac{9}{(p+2)^3} + \frac{-19}{(p+2)^2} + \frac{22}{p+2} + \frac{-22}{p+3}$$

Exemple 3 :

$$S(p) = \frac{1}{(p^2+2p+5)(p+1)} = \frac{Ap+B}{p^2+2p+5} + \frac{C}{p+1}$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1).S(p) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = 0 = A + C \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$p=0 : \frac{1}{5} = \frac{B}{5} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$S(p) = -\frac{1/4 \cdot p + 1/4}{p^2+2p+5} + \frac{1/4}{p+1}$$