MPSI

Programme de colle - semaine 05 du 14/10/2024 au 20/10/2024

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un ($*$).

1 Équations différentielles

Pour l'ordre 1, les démonstrations sont à savoir. Pas pour l'ordre 2.

- ED linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants, avec second membre, usuellement notée de façon incorrecte $x' + a(t)x = b(t)$.
  a et b sont des fonctions continues de I (intervalle) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  - Résolution de l'équation homogène associée (E_0).
    (*) Énoncer proprement le théorème en définissant les objets, en précisant les hypothèses et en donnant la formule.
    Cas particulier où a est constante.
  - Équation complète : expression de l'ensemble des solutions à l'aide d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
  - Variation de la constante : **(*) expliquer la méthode dans le cas général.**
  - Problème de Cauchy : **(*) donner un énoncé précis d'existence et d'unicité pour l'équation complète avec condition initiale.**
- ED linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
  - Équation homogène : $x'' + ax' + bx = 0$, avec a, b complexes. Équation caractéristique.
    Dans le cas où a et b sont réels, expression des solutions réelles.
  - ED d'ordre 2 complète $x'' + ax' + bx = f$: uniquement quand f est exponentielle ou sinusoïdale (pour d'autres types de seconds membres, donner une indication). Théorème de superposition.
    Problème de Cauchy : existence et unicité d'une solution quel que soit le second membre continu (admis).
    La méthode de variation des constantes à l'ordre 2 est hors-programme en sup.

2 Fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- C'est le tout début, nous n'avons fait très peu d'exercices. Le but est avant tout de se familiariser avec les méthodes de base (avoir le réflexe de faire le lien entre racine et factorisation, penser immédiatement au degré, au coefficient dominant, au nombre de racines, etc.).
- La définition formelle des polynômes n'a pas été vue. Pour l'instant les notions de **fonction polynômiale** et **polynôme** sont confondues.
- Définition d'une fonction polynômiale (avec quantificateurs et symbole $\sum$).
  Notations $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ou $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ ou $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k x^k$ (avec (a_k) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ presque nulle).
  La somme, le produit de fonctions polynômiales sont des fonctions polynômiales.
- Unicité des coefficients : 2 versions ont été données (ne pas demander la démonstration mais les propriétés doivent être correctement énoncées, en plaçant bien les quantificateurs) :
  - Si deux fonctions polynômiales sont égales, alors leurs suites de coefficients sont égales.
  - Si une fonction polynômiale est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.
- Coefficients de la somme, du produit.
  Degré d'un polynôme. Degré de la somme, du produit. Coefficient dominant, polynôme unitaire.
  Si le produit de deux fonctions polynômiales est nul, alors l'une des deux est nulle.
- Racine d'une fonction polynômiale. Caractérisation en terme de factorisation (*).
  Factorisation d'un polynôme dont on connaît plusieurs racines **distinctes**.
  Tout polynôme de degré au plus n, ayant au moins $n + 1$ racines distinctes, est nul.
  Tout polynôme ayant une infinité de racines est nul.
- Théorème de D'Alembert-Gauss. Factorisation complète dans $\mathbb{C}$.

Tout ce qui n'apparaît pas explicitement dans la liste précédente n'a pas encore été vu. En particulier :

- Notations X, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$.
- Factorisation réelle.
- Factorisation de $x^n - 1$.
- Racine simple/multiple.
- Polynôme irréductible. Division euclidienne, arithmétique. Relations entre coefficients et racines.

3 Exercices

1. **Banque CCINP, exercice 42**
   On considère les deux équations différentielles suivantes :
   $2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
   $2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$
   a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

2. Une équation différentielle d'ordre 2 avec second membre et conditions initiales (pas trop calculatoire).

3. a) Montrer que la fonction polynômiale $P(x) = 2x^3 - 6x + 1$ a trois racines réelles distinctes (**qu'on ne cherchera pas à calculer**). On les note α, β, γ.
   Possibilité de changer la fonction
   b) Calculer $\alpha\beta\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$.