MPSI

Programme de colle - semaine 06 du 04/11/2024 au 10/11/2024

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1 Fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- Exercices sur le programme précédent.
- Factorisation complexe de $x^n - 1$ (*).

2 Théorie des fonctions

- Pas de définition précise de la notion de fonction : une fonction de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. On ne distingue pas les notions de fonction et d'application.
- Image directe, notation $f(A)$. Image réciproque, notation $f^{-1}(B)$ indépendamment de la notion de bijection.
- Composition. Application identique. Restriction (notation $f_{|A}$), prolongement.
- Application injective, surjective, bijective. Composition de deux applications injectives $(*)$, surjectives $(*)$, bijectives.
- Réciproque d'une bijection. Réciproque d'une composée.
- Autres notions évoquées (pas d'exercice fait) : famille indexée par un ensemble non vide, fonction indicatrice d'une partie (notation $\mathbb{1}_A$).

3 Exercices

1. **D'après CCINP Exercice 84**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère l'équation $(E)\ :\ (z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

   a) Justifier, sans la résoudre, que (E) a au plus $n-1$ solutions dans $\mathbb{C}$.

   b) On admet que les solutions de (E) sont $\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, $\quad k \in [\![1, n-1]\!]$.

   Donner la factorisation de la fonction polynomiale $P\ :\ z \longmapsto (z+i)^n - (z-i)^n$.

2. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$

   a) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f\left(\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\right)$

   b) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\right)$

   c) Soit $g\colon \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

   Montrer que g est bien définie et qu'elle est bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

3. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f\ :\ E \longrightarrow F$ et $g\ :\ F \longrightarrow G$.
   Soit $h = g \circ f$

   a) **Première possibilité**

i) Redonner la définition de “f est injective”, et définir avec des quantificateurs “f n’est pas injective”.

ii) Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.

iii) Montrer que si h est injective, alors f est injective.

b) **Deuxième possibilité**

i) Redonner la définition de “f est surjective”, et définir avec des quantificateurs “f n’est pas surjective”.

ii) Montrer que si f et g sont surjectives, alors h est surjective.

iii) Montrer que si h est surjective, alors g est surjective.