

Programme de colle - semaine 07 du 11/11/2024 au 17/11/2024

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un (*).

1 Fonctions usuelles

- Théorème de la bijection (aussi appelé corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) :
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ strictement monotone (I : intervalle)
 - $f(I)$ est un intervalle de même nature que I , dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I .
 - f définit une bijection de I vers $f(I)$.
 - f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f .
 (résultats admis)
- Courbe de f^{-1} . Dans le cas où f est dérivable, étude de la dérivabilité de f^{-1} et expression de sa dérivée (résultats admis mais donner l'interprétation géométrique)
- Définition de arcsin, arccos, arctan. En particulier, il ne faut pas hésiter sur leurs ensembles de départ et d'arrivée. Variations, parité de arcsin (*), de arctan.
- Ensemble de dérivabilité et dérivée des fonctions trigonométriques réciproques (*). (incluant la simplification $\cos(\arcsin x) = \dots$ pour la dérivée de arcsin)
- Primitives et intégrales de $x \mapsto \frac{ax+b}{P(x)}$, où P est un polynôme de degré 2 qui n'a pas de racine réelle.
- Fonctions hyperboliques ch, sh, th : expression, dérivée, variations.
La seule formule exigible est $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme (mais la recherche de leur expression peut faire l'objet d'un exercice)
- On pourra donner un calcul d'intégrale faisant intervenir les fonctions trigonométriques réciproques (avec IPP, changement de variable, ...).

2 Calcul matriciel

- C'est le tout début. Donner uniquement (à tout le monde) un petit produit à calculer.
- Généralités : Matrice. Matrice ligne/colonne/carrée. Matrice diagonale, triangulaire, élémentaire.
Notations $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Opérations vectorielles (somme, multiplication par un scalaire). Propriétés
- Produit matriciel : **expression des coefficients du produit**. Propriétés du produit, en particulier l'associativité : $A(BC) = (AB)C$ dès que ces expressions sont définies (*).
- Non vu : matrice identité, matrice scalaire. Puissances d'une matrice carrée. Passage d'un système de suites récurrentes scalaires à une suite matricielle. Transposée, trace.

3 Exercices

1. Soit $f : x \mapsto \arccos(\cos x)$ (possible aussi avec $\arcsin(\sin x)$ et $\arctan(\tan x)$)
 - a) Déterminer l'ensemble de définition de f , sa parité, sa périodicité pour restreindre l'étude à un intervalle I dans lequel l'expression de f est simple.
 - b) Déterminer $f\left(\frac{23\pi}{19}\right)$ (valeur à changer) sous la forme $\frac{a\pi}{b}$, où a et b sont deux entiers.
 - c) Tracer la courbe de f en expliquant pas à pas la construction de la courbe.

2. Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer f' . Que peut-on en déduire ?

3. a) Montrer que la fonction th est bijective de \mathbb{R} vers un intervalle I à déterminer, puis déterminer l'expression de sa réciproque (notée argth).
- b) Sans utiliser l'expression de argth , dire quel est son ensemble de dérivabilité et donner l'expression de sa dérivée.