

INTRODUCTION A LA MODELISATION CINEMATIQUE DES MECANISMES

Objectifs du TD :

- Découvrir la notion de liaisons entre solides indéformables et les représentations normalisées de celles-ci.
- Découvrir deux modèles de description structurelle des parties opératives des systèmes automatisés : le graphe de structure et le schéma cinématique. La maîtrise de ces modèles étant nécessaire à la conduite de calcul en mécanique du solide.
- Etablir des lois entrées/sortie de mécanisme à partir de leur schématisations.

1^{ère} partie : les liaisons normalisées

A) identification des liaisons

Un solide présent dans un mécanisme possède ce que l'on appelle des degrés de liberté, c'est-à-dire des mouvements possibles dans certaines directions. Dans le cas d'un solide non lié, dans l'espace ou en sustentation électromagnétique, le nombre de degrés de liberté (ddl) est de 6.



Animation du Dé : observez les mouvements du Dé

Question 1: Grâce à cette animation définissez précisément les degrés de liberté possibles du Dé.

Lorsqu'un solide S1 est lié à un autre solide S2, le nombre de degrés de liberté de S1 diminue en fonction de la nature de sa liaison avec S2. Les surfaces de contact entre les 2 solides empêchent certains mouvements (rotation ou translation). Les degrés de liberté autorisés par la liaison sont alors les mouvements relatifs entre les 2 solides encore possibles.

Exemple : un arbre (cylindre plein) dans un alésage (trou cylindrique) de diamètre légèrement supérieur possède comme degrés de liberté, une rotation et une translation autour de l'axe commun des deux parties cylindriques. La liaison entre l'arbre et l'alésage est appelée liaison pivot glissant.

La norme française (NF EN ISO3952-1) permet de définir 11 liaisons mécaniques autorisant chacune un certain nombre de degrés de liberté.



Animation pivot glissant : observez les mouvements possibles dans le cas de la liaison pivot glissant.

Question 2 : Grâce à cette animation complétez le tableau du document réponse (la colonne caractéristique sera complétée par le professeur).



Animations suivantes

Question 3 : Recommencez ce travail pour les 10 autres liaisons normalisées :

Un mécanisme quel qu'il soit peut donc se décomposer en un certain nombre de solides liés. Leurs liaisons étant identifiables parmi la liste des 11 liaisons normalisées que vous venez de découvrir.

B) représentation des liaisons normalisées

Afin d'étudier les mouvements d'un mécanisme et d'appréhender globalement sa cinématique, il est nécessaire de pouvoir le représenter de manière simple. Il a donc été nécessaire de créer des représentations symboliques de chacune des liaisons normalisées.

La liste des liaisons normalisées et de leur symbolique est fournie page 8.

Travail à faire : Afin de bien comprendre que la représentation symbolique d'une liaison traduit des mouvements possibles entre solides, repassez en couleur (Une couleur par solide) les symboles proposés dans le tableau page 6

2^{ème} partie : modélisation cinématique des mécanismes

On se propose d'étudier les liaisons de deux mécanismes, l'un de transmission de mouvement et l'autre de transformation de mouvement.

A. mécanisme 1 : le joint de Oldham

Le dessin d'ensemble et l'éclaté ci-dessous représentent un joint de Oldham, mécanisme qui permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres parallèles mais non coaxiaux.



Animation joint de Oldham : Observez le mécanisme qui s'anime. Il se compose du joint et d'un bâti fixe (en gris) en liaison avec les 2 arbres d'entrées (4) et de sorties (7)

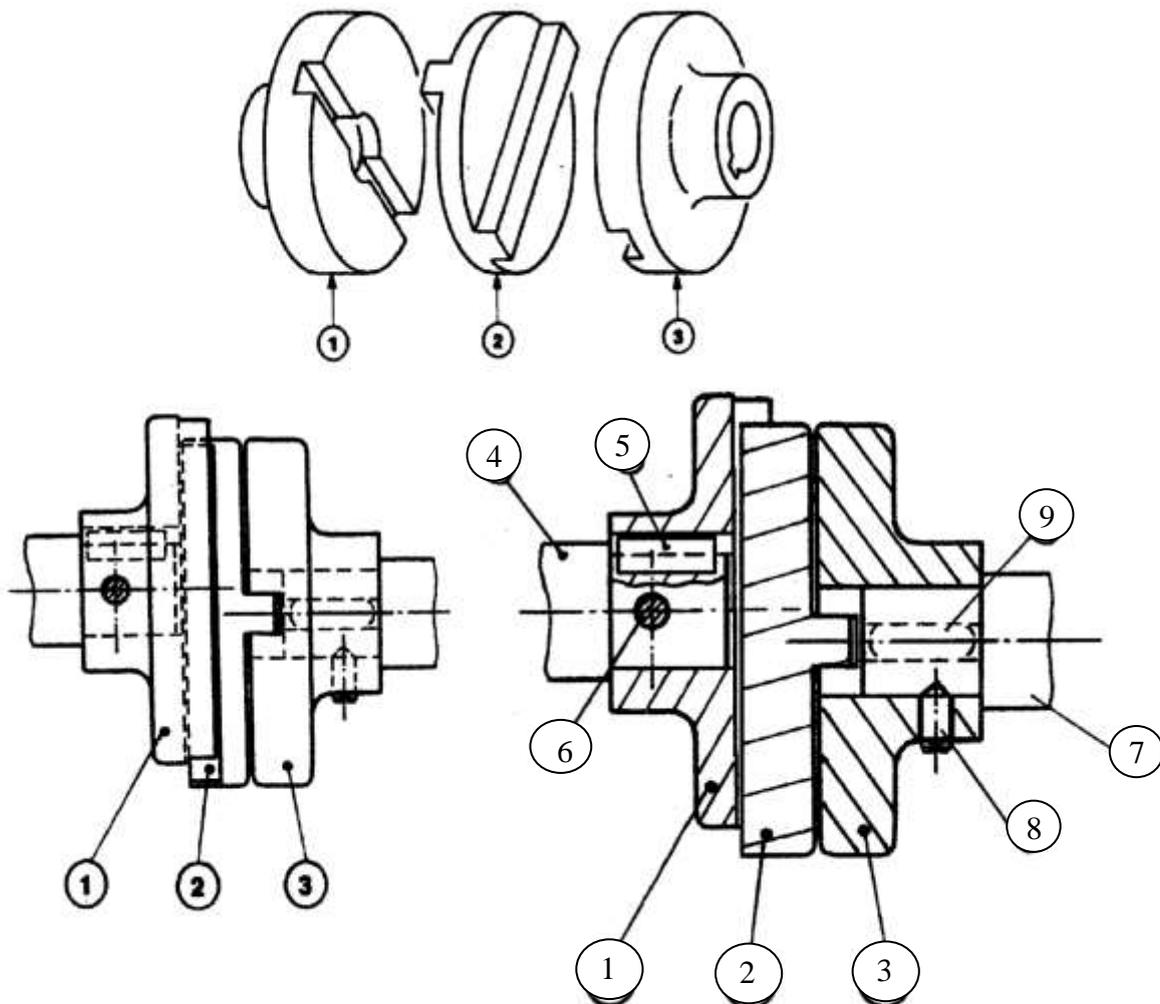
A - 1 : Etude des mouvements relatifs

Question 4 : Définissez la nature (translation ou rotation) du mouvement relatif :

- de la pièce (1) par rapport à la pièce (2)
- de la pièce (2) par rapport à la pièce (3)
- de la pièce (1) par rapport au bâti (0)
- de la pièce (3) par rapport au bâti (0)

A - 2 : Modélisation cinématique du mécanisme

Le but de cette partie est de représenter le mécanisme sous une forme simplifiée en utilisant les représentations symboliques des liaisons. Cette représentation est appelée schéma cinématique.



Vue éclatée des 3 pièces principales et plan d'ensemble (vues extérieure et vue en coupe) sans le bâti

On va suivre 3 étapes.

Étape 1 : Notion de classe d'équivalence cinématique :

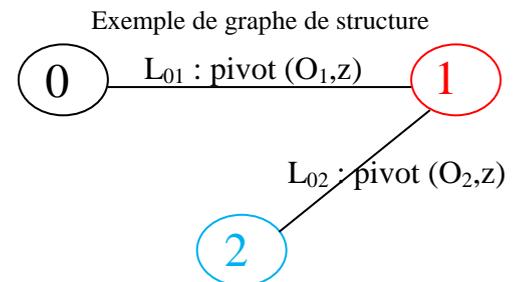
Une classe d'équivalence cinématique est un sous-ensemble de pièces du mécanisme étudié qui n'ont aucun mouvement relatif les uns par rapport aux autres. Ces pièces sont en liaison complète les uns par rapport aux autres.

Remarque : La modélisation cinématique d'un mécanisme ne prend pas en compte les éléments conçus pour se déformer (joints d'étanchéité, ressort,...) , ni les éléments tels que les fluides.

Question 5 : Définissez les classes d'équivalence cinématique du joint de Oldham avec le bâti :
(exemple : classe d'équivalence N°1 : pièce 1 + pièce 6 + ...)

Étape 2 : Graphe de structure (des liaisons)

C'est une première modélisation du mécanisme pour laquelle chaque classe d'équivalence cinématique est représentée par un cercle numéroté et chaque liaison entre classe d'équivalence par une ligne rejoignant les deux classes d'équivalence concernées. On précise en plus au-dessus de la ligne le nom de la liaison et ses caractéristiques (axe et centre).

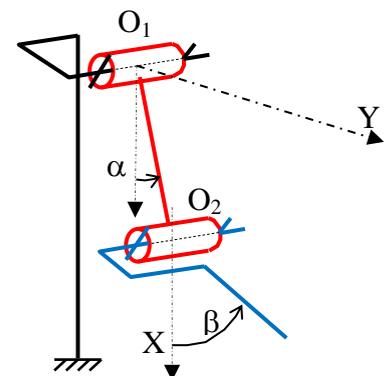


Question 6 : Dessinez le graphe des liaisons du joint de Oldham avec le bâti. Vous préciserez le nom des liaisons identifiées ainsi que leur caractéristique.

Étape 3 : Schéma cinématique minimal

C'est une représentation filaire d'un mécanisme qui rend compte exclusivement des mouvements possibles entre les solides. Elle utilise la représentation normalisée des liaisons et respecte la géométrie du mécanisme c'est-à-dire la disposition des axes des liaisons (distance entre axes et position angulaire).

Exemple de schéma cinématique



Question 7 : Dessinez le schéma cinématique spatial (en perspective) du joint de Oldham en vous aidant des symboles normalisés des liaisons. Vous utiliserez le schéma esquissé du document réponse sur lequel ont été dessinés les axes des liaisons du mécanisme.

B. mécanisme 2 : le vérin mécanique d'appoint

Le plan d'ensemble en deux vues ci-dessous (vue en coupe principale et vue de dessus en coupe) représente un vérin mécanique manuel permettant de soulever des charges lourdes ou de rehausser un meuble. Chaque classe d'équivalence est représentée par une couleur.

1 - Donner le nom, le nombre de degrés de liberté et les caractéristiques des liaisons suivantes: 4/3, 8/1, 4/2, 2/5, 5/1, 2/1.

2 - Etablir le graphe de structure de ce mécanisme.

3 - Tracer le schéma cinématique dans le plan (y,z).

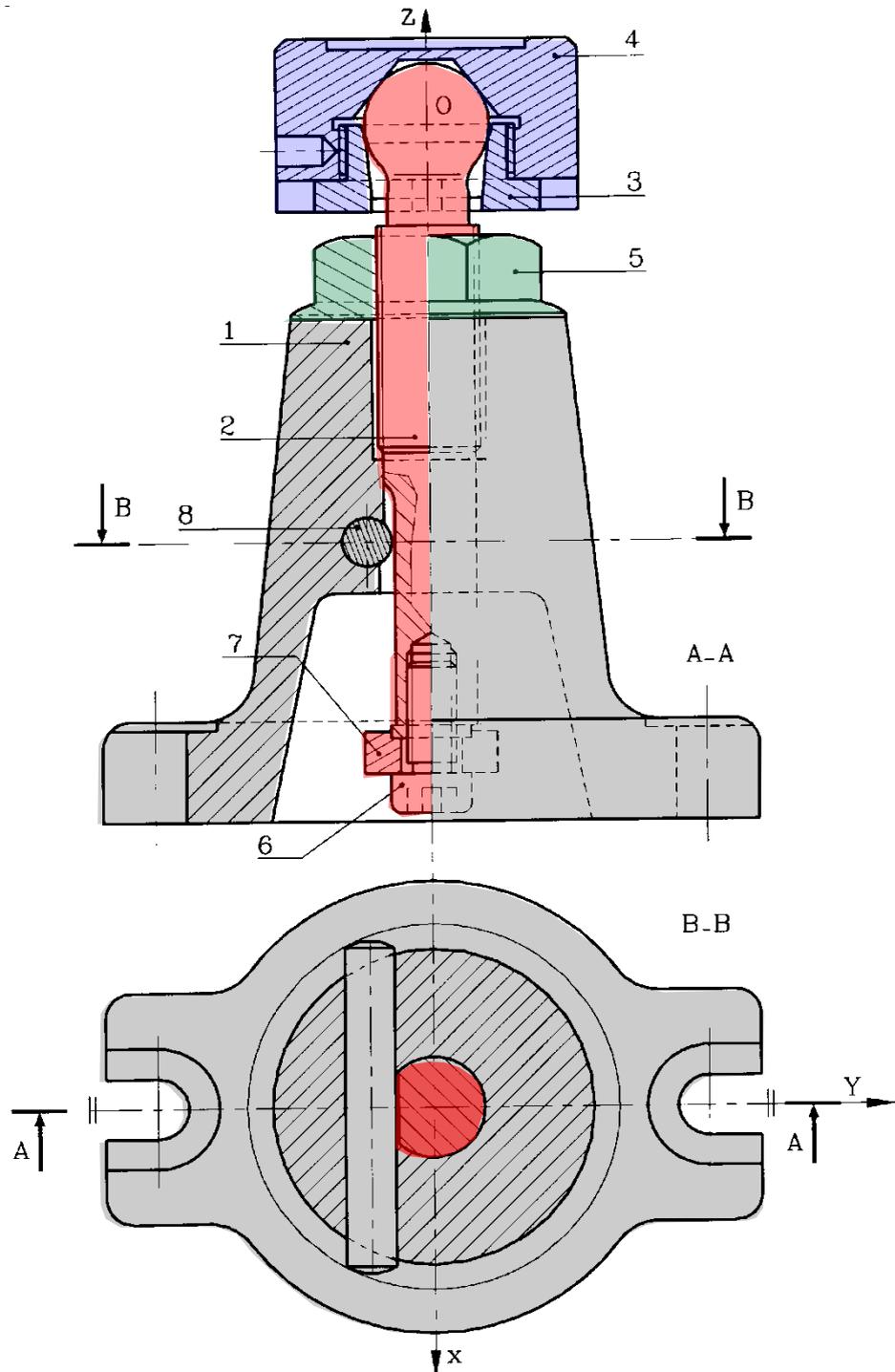
4 - Quel est le rôle de la pièce 8 ?

5 - Quel est l'intérêt d'avoir ce type de liaison entre 2 et 4 ?

6 - Sur quelle pièce faut-il agir pour lever le support 4 ?

7 - Quel est le rôle de la pièce 7 ?

Nomenclature			
8	1	Goupille cylindrique	Montée serrée dans 1
7	1	Rondelle spéciale	
6	1	Vis CHC M10	
5	1	Ecrou à embase	
4	1	Support taraudé	
3	1	Chapeau vissé	
2	1	Vis à tête sphérique	
1	1	Corps du vérin	
Rep	Nb.	Désignation	Observation



A retenir

MODELISATION CINEMATIQUE D'UN MECANISME

1 – Définitions

1.1 – Liaison parfaite

Dans un système mécanique, la mise en contact de deux pièces implique des conditions ou des limitations possibles des déplacements relatifs entre ces deux pièces. La liaison entre deux pièces est donc caractérisée par les surfaces en contact. Pour faire l'étude des différentes liaisons, on fait l'hypothèse de *liaison parfaite*:

- les surfaces de chacune des pièces sont géométriquement parfaites (pas de défaut de forme ni de rugosité)
- les pièces sont des solides indéformables (pas de déformation ni d'usure)
- pas de jeu entre les pièces
- le contact se fait en un point, une courbe ou une surface de définition géométrique simple (point, droite, cercle, plan, cylindre, sphère)
- **le frottement est négligé**

1.2 – Degrés de liberté d'une liaison

La position d'un solide dans l'espace peut être repérée par 6 paramètres soit 6 mouvements possibles: 3 rotations et 3 translations.

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison entre deux solides est le nombre de mouvements indépendants que la liaison autorise et qui seront ou pas utilisés dans un mécanisme.

1.3 – Liaisons normalisées

La norme définit 11 liaisons particulières par leur nom, les degrés de liberté, la représentation schématisique (voir tableau). Il faut connaître leurs caractéristiques (axe, normale, centre,...). Il faudra plus tard connaître la forme du torseur cinématique et d'action mécanique associée à chaque liaison.

2 – Chaînes de solides

2.1 – Graphe de structure ou graphe des liaisons

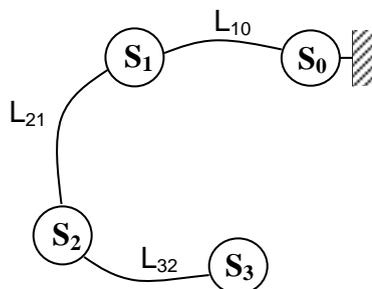
On appelle classe d'équivalence cinématique un ensemble de Solides cinématiquement liés.

Les classes d'équivalence cinématique sont schématisées par des cercles.

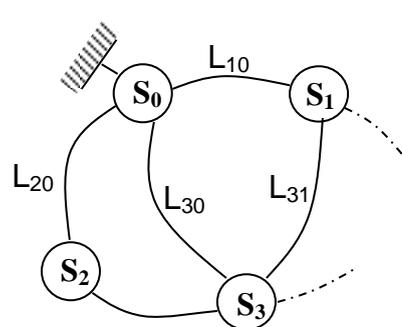
Les liaisons sont représentées par des arcs entre les solides.

Le graphe des liaisons précise les caractéristiques des liaisons (points, axes, normales...).

Chaîne simple ouverte



Chaîne complexe fermée



2.2 – Schéma cinématique

Les classes d'équivalence sont représentées sans épaisseur avec une couleur par pièce.

Les pièces en liaison fixe (cinématiquement liées) sont représentées de la même couleur (même classe d'équivalence).

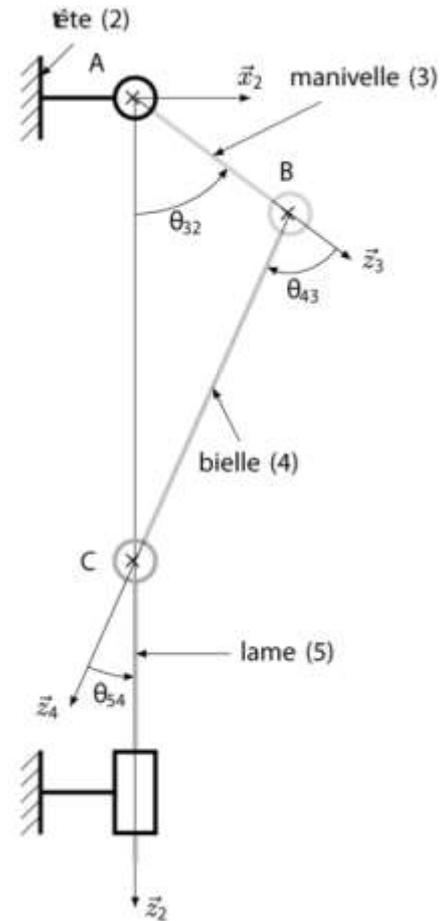
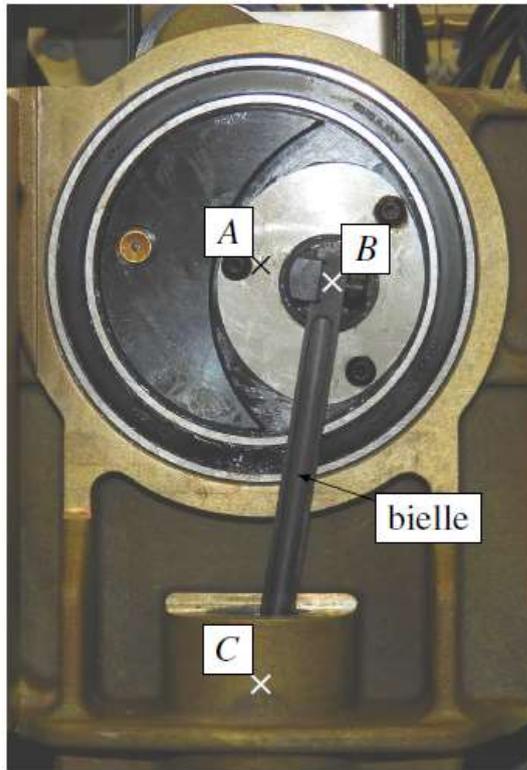
Les liaisons sont schématisées suivant la norme.

2.3 – paramétrage

En fonction du type de degré de liberté (translation ou rotation), on définit un paramétrage dépendant du temps. Les autres paramètres constants permettent de positionner les points nécessaires dans des repères liés aux solides.

Exemple de paramétrage : tête de découpe de tissu (extrait ccp mp 2018).

Un moteur électrique engendre la rotation (autour de A) de la manivelle par rapport au bâti. Un système bielle manivelle transforme cette rotation en translation verticale alternative de la lame par rapport au bâti.



On associe le repère $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à la tête 2, le repère $\mathcal{R}_3 = (A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ à la manivelle 3, le repère $\mathcal{R}_4 = (B, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ à la bielle 4 et le repère $\mathcal{R}_5 = (C, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ à la lame 5.

La manivelle 3 est en liaison pivot avec la tête 2, d'axe (A, \vec{y}_2) et d'angle $\theta_{32}(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.

La manivelle 3 est en liaison pivot avec la bielle 4, d'axe (B, \vec{y}_2) et d'angle $\theta_{43}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$.

La bielle 4 est en liaison pivot avec la lame 5, d'axe (C, \vec{y}_0) et d'angle $\theta_{54}(t) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = (\vec{z}_4, \vec{z}_2)$.

La lame 5 est en liaison glissière avec la tête 2, de direction \vec{z}_2 et de paramètre linéaire $\lambda(t)$.

On pose : $\overline{AB} = L_3 \vec{z}_3$ avec $L_3 = 12,5 \text{ mm}$, $\overline{BC} = L_4 \vec{z}_4$ avec $L_4 = 80 \text{ mm}$ et $\overline{AC} = \lambda(t) \vec{z}_2$.

2.4 - loi entrée/sortie géométrique

Un premier travail à réaliser est de définir la loi géométrique reliant le paramètre d'entrée (évolution fournie par un actionneur) au paramètre de sortie (mouvement récupéré en sortie).

On écrit pour cela les fermetures géométriques.

a) Aspect linéaire:

On parcourt le mécanisme en passant par un point A_i de chaque liaison :

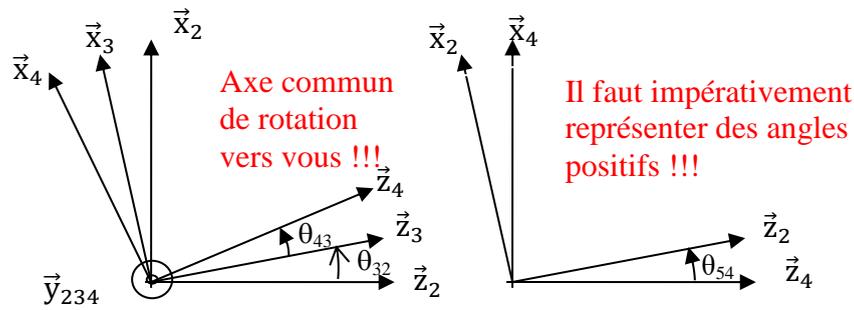
$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{n+1} A_1} = \vec{0} \Rightarrow 3 \text{ équations scalaires par projection dans une base commune}$$

b) Aspect angulaire :

A partir d'une base de référence, on parcourt les différentes bases attachées aux différents solides :

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \dots + (\vec{x}_n, \vec{x}_0) = 0$$

idem dans deux autres plans perpendiculaires $\Rightarrow 3$ équations scalaires.

Exemple de loi entrée/sortie :

Figures de changement de bases

Fermeture angulaire : $(\vec{x}_2, \vec{x}_2) = 0 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_4) + (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = \theta_{32}(t) + \theta_{43}(t) + \theta_{54}(t) = 0$

On réalise une fermeture géométrique entre les points A, B et C : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

$$\Rightarrow L_3 \vec{z}_3 + L_4 \vec{z}_4 - \lambda \vec{z}_2 = \vec{0}$$

En projection sur \vec{x}_2 :

$$L_3 \sin \theta_{32} + L_4 \sin(\theta_{43} + \theta_{32}) = 0 \Rightarrow L_3 \sin \theta_{32} = L_4 \sin \theta_{54} \quad \text{d'où } \sin \theta_{54} = \frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}$$

$$\sin^2 \theta_{54} = \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2 \quad \cos^2 \theta_{54} = 1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2$$

$$\cos \theta_{54} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2} \quad (\text{avec } L_3 < L_4)$$

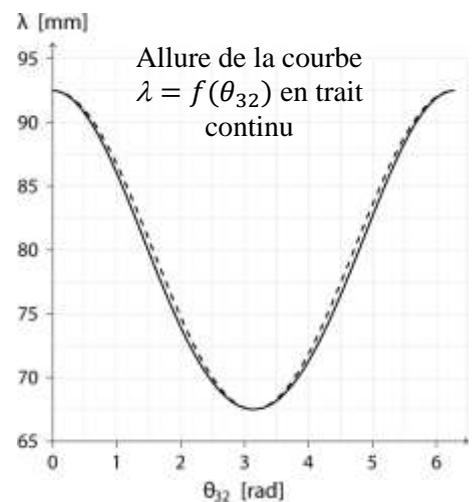
En projection sur \vec{z}_2 :

$$L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \cos(\theta_{43} + \theta_{32}) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \cos \theta_{54}$$

$$\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2} \quad \text{ou} \quad \lambda = L_3 \cos \theta_{32} - L_4 \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2}$$

D'après le schéma cinématique et le paramétrage λ doit être positif, on en déduit :

$$\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \sqrt{1 - \left(\frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2}$$



C'est la loi géométrique reliant le mouvement d'entrée, position angulaire θ_{32} par rapport au bâti, fourni par l'actionneur qui est un moteur électrique, au mouvement de sortie, position linéaire λ , de la lame par rapport au bâti.

Le principe est d'éliminer les paramètres internes au mécanisme ($\theta_{43}(t)$ et $\theta_{54}(t)$) grâce aux fermetures géométriques.

Tableau « simplifié » des liaisons normalisées

Désignation Et caractéristiques	Représentation plane	Représentation en perspective	Degrés de liberté	Exemples
Encastrement ou liaison fixe			Aucun	Assemblage par vis, goupille, soudure...
Pivot	ou		1 Rz	Roue sur son axe Pivot de porte
Glissière	ou		1 Tz	Tiroir de bureau Assemblage par cannelures ou clavette
Hélicoïdale	ou		1 Rz et Tz liés	Système vis-écrou
Pivot glissant	ou		2 Rz Tz	Arbre à l'intérieur d'un alésage de même diamètre
Appui plan			3 Ry Tx, Tz	Deux plans en contact
Rotule ou sphérique			3 Rx, Ry, Rz	Contact suivant une portion de sphère
Rotule à doigt			2 Rx, Ry	Joint de cardan
Linéaire rectiligne			4 Ry, Rz Tx, Tz	Contact = droite Cylindre en contact avec un plan selon une génératrice
Linéaire annulaire			4 Rx, Ry, Rz Tz	Sphère dans un cylindre de même diamètre
Ponctuelle			5 Rx, Ry, Rz Tx, Ty	Contact = point Sphère sur plan Surface de faibles dimensions

Exercices : Analyse de schémas cinématiques

1. Réaliser les graphes de liaisons des trois mécanismes présentés ci-après. On paramétrera les schémas au besoin.

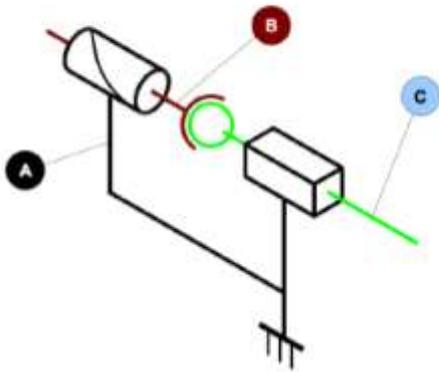


FIGURE 1 – Casse-écrou

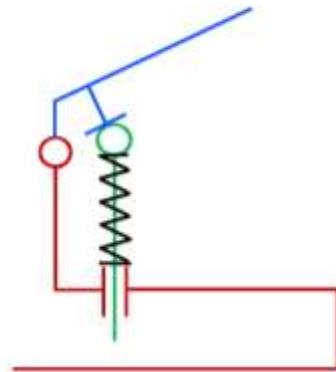


FIGURE 2 – Perforatrice

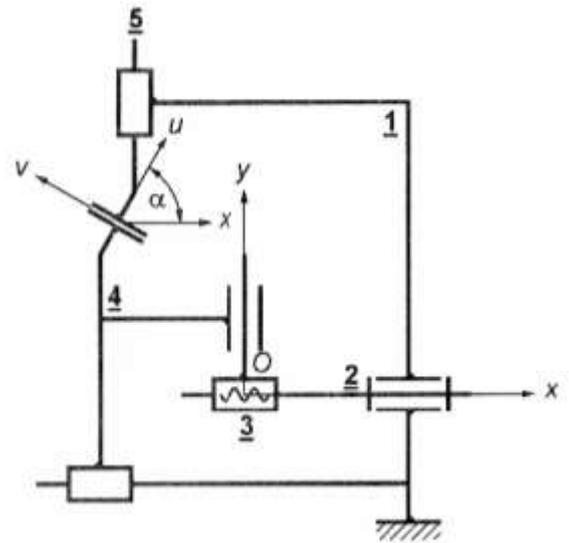
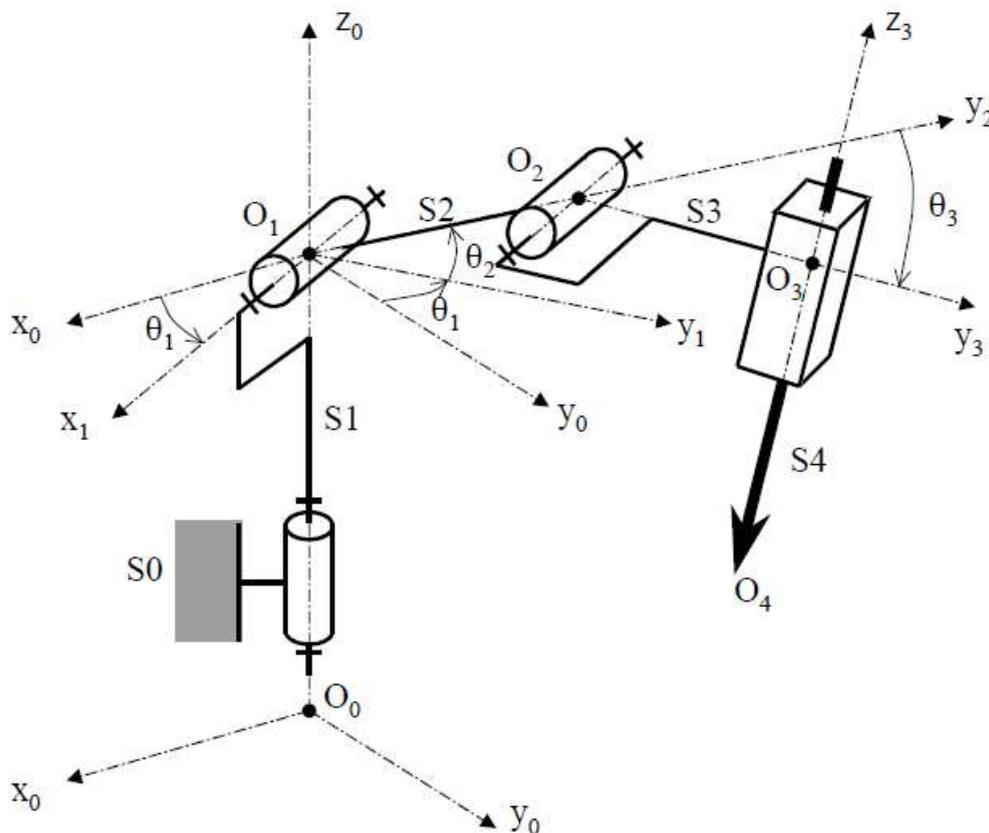
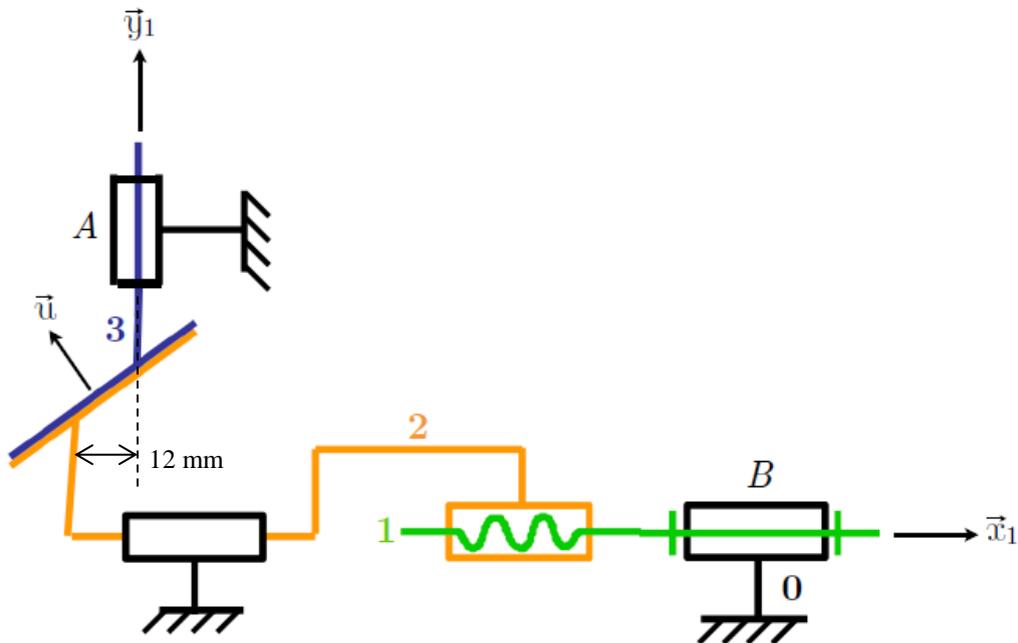


FIGURE 3 – Mécanisme de réglage

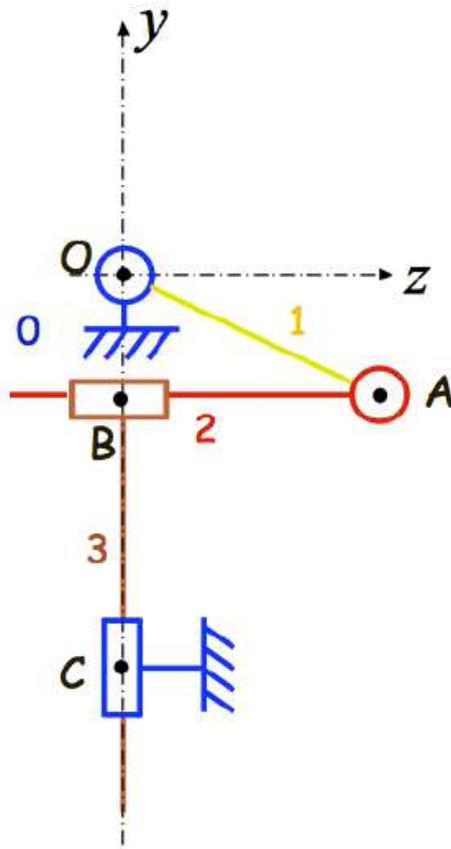
2. On s'intéresse à un robot de soudage dont le mécanisme est représenté par le schéma cinématique de la figure suivante. Réaliser le graphe de liaisons associé. Comment caractérise-t-on ce type de mécanisme ? Expliquer pourquoi ce type de robot est nommé RRRT.



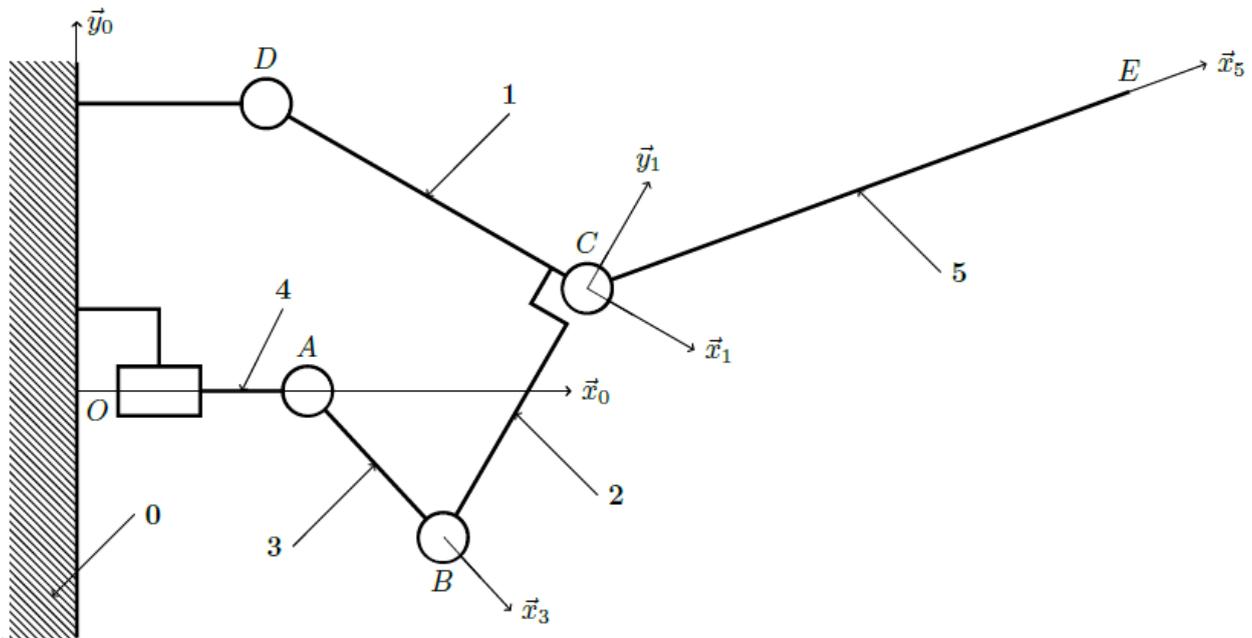
3. Le système vis-écrou du mécanisme possède un pas $p_v = 3 \text{ mm/tr}$. Sachant que $(\vec{y}_1, \vec{u}) = 45^\circ$, combien de tours faut-il effectuer pour aligner le segment vertical le plus à gauche du solide 2 avec l'axe (A, \vec{y}_1) ? De quelle distance est descendu le solide 3 ?



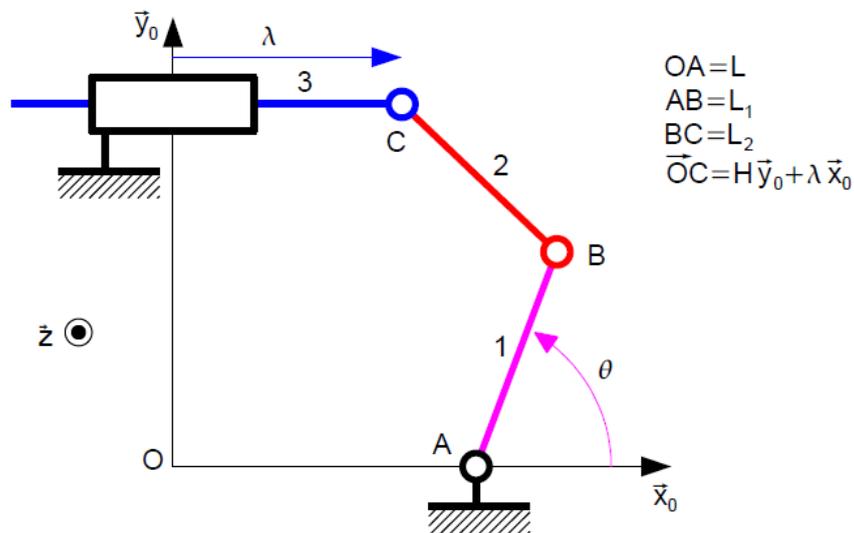
4. Translater le solide 3 de 1 cm vers le bas. Placer les nouvelles positions des points O , A , B et C . Quelle amplitude angulaire a parcouru le solide 1 ? Dans quelle configuration particulière des points A et B le solide 3 sera-t-il au point mort bas (position la plus basse possible) ? Quelle est donc la course (distance entre le point mort bas et le point mort haut) parcourue par le solide 3 ?



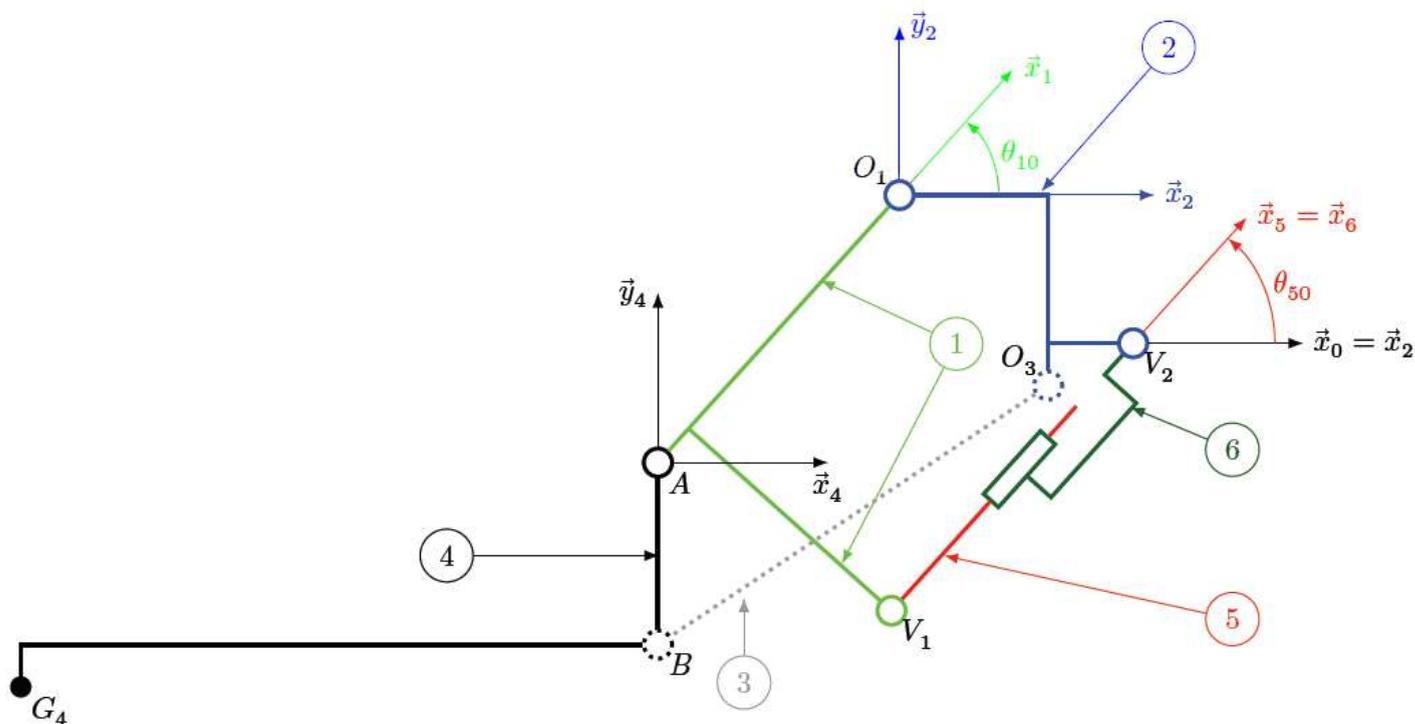
5. Le solide 4 se déplace de 1 cm vers la gauche ; placer A'. Tracer la trajectoire $T(B \in 3/4)$ puis la trajectoire $T(B \in \{1 + 2\}/0)$; en déduire B' puis C'.



6. On considère le mécanisme de transformation de mouvement ci-après. Tracer le graphe de liaisons puis déterminer une relation entre $\lambda(t)$ et $\theta(t)$.



7. Le bâti est le solide 2. Déterminer la nouvelle position du solide 4 lorsque la tige de vérin s'allonge de 1 cm.



$$\text{Paramétrage : } \theta_{10} = (\vec{x}_2, \vec{x}_1) \quad \theta_{30} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) \quad \theta_{40} = (\vec{x}_2, \vec{x}_4) \quad \theta_{50} = (\vec{x}_2, \vec{x}_5)$$

$$\vec{O_1A} = -a\vec{x}_1 \quad \vec{AB} = -b\vec{y}_4 \quad \vec{BO_3} = c\vec{x}_3 \quad \vec{O_3O_1} = -d\vec{x}_2 + e\vec{y}_2$$

$$\vec{V_2V_1} = -\lambda(t)\vec{x}_5 \quad \vec{V_1O_1} = f\vec{x}_1 + g\vec{y}_1 \quad \vec{O_1V_2} = h\vec{x}_2 - i\vec{y}_2$$

Utiliser le paramétrage ci-dessus pour exprimer la relation entre θ_{40} , λ et les paramètres dimensionnels constants du problème.

Document réponse

Nom de la liaison	Nature surfaces contact	Nb ddl	Nature ddl	Caractéristique liaison
Pivot glissant				
Pivot				
Glissière				
Ponctuelle ou sphère plan				
Appui Plan				
Rotule ou sphérique				
Rotule à doigt ou sphérique à doigt				
Linéaire annulaire ou sphère cylindre				
Linéaire Rectiligne ou cylindre plan				
Hélicoïdale				
Encastrement ou liaison fixe				

Document réponse

Schéma cinématique spatial du joint de oldham

