

1 Limites de fonctions

L'objectif est avant tout d'acquérir des méthodes pratiques de recherche de limite. Aucune définition théorique de la notion de limite n'a été donnée. On ne soulèvera aucune difficulté sur l'ensemble de définition des fonctions, le point où on cherche une limite ni sur la notion de "propriété vraie au voisinage d'un point".

L'objectif est aussi faire comprendre les "bons" usages des relations de comparaison : penser à normaliser la fonction dans un $o(\cdot)$, comprendre que $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$ est beaucoup moins pertinent que $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, etc.

- Limite obtenue par opérations : somme, produit, inverse, composition.
- Limite obtenue par encadrement (théorème des gendarmes), ou par une seule inégalité (dans le cas d'une limite infinie).
- Notation $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$

La définition par "il existe une fonction α qui tend vers 0 en x_0 telle que $f = \alpha g$ " a été donnée, mais en pratique on considère des fonctions qui ne s'annulent pas (au voisinage de x_0) donc on utilise la

$$\text{caractérisation } f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\longrightarrow} 0.$$

- Croissances comparées "de base" : pour tous $a, b, c > 0, r > 1$:

$$\frac{(\ln x)^a}{x^b} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \frac{x^b}{e^{cx}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \frac{r^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$|\ln x|^a x^b \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Et leur traduction en terme de $o(\cdot)$.

- La notation $O(\cdot)$ a été définie mais pas utilisée.
- Notation $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$.

Même remarque pour le $o(\cdot)$: penser au quotient avant tout.

Symétrie, transitivité.

- Propriétés élémentaires (notamment : si deux fonctions sont équivalentes et si l'une a une limite, alors l'autre a la même limite. Réciproque fautive si cette limite est 0 ou infinie).
- Conservation du signe au voisinage de x_0 .
- Règles de calcul élémentaires (notamment $f + o(f) \sim f$ et multiplication/division/puissance sur les équivalents).
- Utilisation de la dérivabilité :

Développement limité d'ordre 1 : si f est dérivable en x_0 , alors $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o_{h \rightarrow 0}(h)$.

- Équivalents obtenus à partir de la dérivée :

Si $f'(x_0) \neq 0$, alors $f(x_0 + h) - f(x_0) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} f'(x_0)h$.

En 0 : $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$, etc.

$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ a aussi été vu en exercice (voir plus bas).

- Changement de variable (composition par une même fonction à droite) :
si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\longrightarrow} y_0$ et $g(y) \underset{y \rightarrow y_0}{\sim} h(y)$ et si , alors $g(f(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(f(x))$. De même avec les $o(\cdot)$.
- Brève extension des relations de comparaison aux suites.
Formule de Stirling.

2 Questions de cours

Pas de grosse démonstration dans cette colle, alors voici quelques possibilités. Il n'est pas interdit, en cours de colle, de demander la caractérisation de $f = o(g)$ ou $f \sim g$ (réponse rapide souhaitée).

- i) Énoncé des croissances comparées et démonstration de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a}$.
- ii) Énoncer et démontrer le lien entre dérivée et équivalent.
- iii) Énoncer et démontrer le développement limité d'ordre 1 pour une fonction dérivable.

3 Exercices

1. Questions indépendantes

a) Manipulation des $o(\cdot)$

Au voisinage de 0, compléter si possible par $o(x^n)$ avec le plus grand $n \in \mathbb{N}$ possible et justifier :

$$\begin{array}{lll} o(x^2) + o(x^4) = & x^2 o(x^3) = & o(x^2) - o(x^2) = \\ o(x^2) o(x^3) = & x^2 + o(x^3) = & \frac{o(x^3)}{o(x^2)} = \\ \frac{o(x^3)}{x^2} = & \frac{x^3}{o(x^2)} = & o(x^2 + 3x) = \end{array}$$

b) Dans chacun des cas, déterminer la limite éventuelle de la fonction ou de la suite au point considéré.

i) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ en $+\infty$.

ii) $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$ en 0.

iii) $f(x) = \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ en $+\infty$.

c) Donner l'équivalent le plus simple de $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ quand x tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser l'expression conjuguée ou le DL₁.

2. a) À l'aide d'une formule de trigonométrie (duplication ou autre), montrer que

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

b) En déduire un équivalent simple en 0 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$