Exercice :

On considère le repère orthonormé $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Soient les deux torseurs :

$$\{T_1\}_A = \left\{ \begin{matrix} -\vec{x}-2\vec{y}-3\vec{z} \\ \vec{x}+\vec{z} \end{matrix} \right\}_A \text{ avec } A(1,1,1) \text{ et } \{T_2\}_B = \left\{ \begin{matrix} \vec{x}+2\vec{y}+3\vec{z} \\ \vec{x}+\vec{z} \end{matrix} \right\}_B \text{ avec } B(0,1,2)$$

Question et travail demandé :

1. *Déterminer le torseur somme de ces deux torseurs exprimé au point A.*
2. *Ce torseur somme est-il particulier ?donner ses caractéristiques.*

Corrigé

1) $$\{T\}_A = \{T_1\}_A + \{T_2\}_A = \left\{ \begin{array}{l|l} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \\ 2 & \\ 3 & \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l|l} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$$

2) C’est un torseur couple d’expression identique en tout point de l’espace.

Exercice :

On considère les trois vecteurs suivants dont les composantes dans le repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sont :

$$\vec{V}_1(0,0,1) \qquad \vec{V}_2(-1,2,0) \qquad \vec{V}_3(\alpha,\beta,\gamma)$$

ainsi que les trois points de coordonnées :

$$A_1(0,0,1) \qquad A_2(0,1,0) \qquad A_3(1,-3,-1)$$

Travail demandé : Déterminer les nombres réels α,β,γ *pour que la somme des trois glisseurs* $\left[A_1,\vec{V}_1\right]$, $\left[A_2,\vec{V}_2\right]$, $\left[A_3,\vec{V}_3\right]$ *soit équivalent à un couple dont on calculera le moment en O.*

Corrigé

1) $$\{T\}_O = \{T_1\}_O + \{T_2\}_O + \{T_3\}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \alpha & -3\alpha+\beta \\ \beta & -\alpha-\gamma \\ \gamma & \beta+3\alpha \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ 0 & N \end{Bmatrix}_O$$

Ce qui donne le système d'équations suivant : $\begin{cases} \alpha-1=0 \\ \beta+2=0 \\ \gamma+1=0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-2 \\ \gamma=-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} L=1 \\ M=0 \\ N=1 \end{cases}$

Exercice :

On considère les torseurs : $\{T_1\}_N = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{Bmatrix}_N$ et $\{T_2\}_N = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{Bmatrix}_N$ réduits au point N.

On appelle comoment de $\{T_1\}$ par $\{T_2\}$ le nombre réel : $\{T_1\} \otimes \{T_2\} = \vec{R}_1.\vec{M}_2 + \vec{R}_2.\vec{M}_1$.

Travail demandé : montrer que $\{T_1\} \otimes \{T_2\}$ est indépendant de N.

Corrigé

$$\{T_1\}_P \otimes \{T_2\}_P = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_1} \end{Bmatrix}_P \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_2} \end{Bmatrix}_P$$

$$= \overrightarrow{R_1}.(\overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_2}) + \overrightarrow{R_2}.(\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_1})$$

$$= \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{R_1}.(\overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_2}) + \overrightarrow{R_2}.(\overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_1})$$

$$= \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{R_1}.(\overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_2}) + \overrightarrow{R_1}.(\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{PN})$$

$$= \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{R_1}.(\overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_2}) - \overrightarrow{R_1}.(\overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R_2})$$

$$= \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1}$$

Car le produit mixte est invariant par permutation circulaire (voir cours de math)

Exercice :

On considère le torseur {T} dont les éléments de réduction au point $C\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ sont : $\{T\}_C = \left\{\begin{matrix}0 & 100\\ -16 & 0\\ -21 & 0\end{matrix}\right\}_C$

Travail demandé :

1. *Déterminer les éléments de réduction du torseur {T} au point* $D\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$.
2. *Calculer l'automoment de {T}, en déduire la nature de {T}.*
3. *Vérifier numériquement l'équiprojectivité de {T} sur la droite passant par C et D.*
4. *Définir l'axe central de {T}.*
5. *Calculer la distance du point C à l'axe central de {T}.*
6. *Représenter graphiquement en perspective :*
   - *le repère* $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$,
   - *les éléments de réduction du torseur {T} au point C,*
   - *l'axe central.*

Corrigé

1) $\{T\}_C = \left\{\begin{matrix}0 & 100\\ -16 & 0\\ -21 & 0\end{matrix}\right\}_C = \left\{\begin{matrix}0 & 100\\ -16 & 0\\ -21 & 0\end{matrix} + \begin{vmatrix}6\\3\\1\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\-16\\-21\end{vmatrix}\right\}_D = \left\{\begin{matrix}0 & 53\\ -16 & 126\\ -21 & -96\end{matrix}\right\}_D$

2) On doit vérifier : $\overrightarrow{M}(C,T).\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{M}(D,T).\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{M}(C,T).\overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix}100\\0\\0\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}6\\3\\1\end{vmatrix} = 600$ et $\overrightarrow{M}(D,T).\overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix}53\\126\\-96\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}6\\3\\1\end{vmatrix} = 600$ OK

3)en supposant que c'est un glisseur, on cherche E/ $\overrightarrow{M}(E,T) = \vec{0}$ or

$\overrightarrow{M}(E,T) = \overrightarrow{M}(C,T) + \overrightarrow{EC}\wedge\vec{R} = \begin{vmatrix}100\\0\\0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2-x\\4-y\\1-z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\-16\\-21\end{vmatrix} = \vec{0}$

D'où : 32+21y-16z=0
x-2=0

d'où x=2 et 32-21y+16z=0

On peut prendre E(2,2,5/8)

L'axe central peut être défini par la droite passant par E et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{vmatrix}0\\-16\\-21\end{vmatrix}$

4) $d = \dfrac{\left\|\overrightarrow{EC}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} = \dfrac{38}{\sqrt{697}} = 1.44$

Exercice :

Soit $R(O,\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$ un repère orthonormé direct. Deux points A et B sont définis par leurs coordonnées : $A(0,0,3)$ et $B(6,0,0)$. Un torseur $\{T\}$ est défini par ses éléments de réduction en A :

$$\{T\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \vec{M}(A)\end{Bmatrix}_A \quad \text{avec} \qquad \text{Résultante générale : } \vec{R}=\vec{x}_2 \ \text{ et } \ \text{Moment en } A : \vec{M}(A)=3\vec{x}_2+3\vec{x}_3 .$$

Travail demandé :

1. *Définir les éléments de réduction du torseur {T} en O et en B.*
2. *Calculer et comparer :* $\vec{R}.\vec{M}(O)\ ;\ \vec{R}.\vec{M}(A)\ ;\ \vec{R}.\vec{M}(B)$.
3. *Vérifier :* $\vec{M}(O).\overrightarrow{OB}=\vec{M}(B).\overrightarrow{OB}$.
4. *Ce torseur est-il un glisseur ?*

Corrigé

1) $\{T\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 3\end{Bmatrix}_A=\left\{\begin{array}{cc|c|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3+ & 0\wedge & 1\\ 0 & 3 & 3 & 0\end{array}\right\}_O=\begin{Bmatrix}0 & -3\\ 1 & 3\\ 0 & 3\end{Bmatrix}_O$ et $\{T\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 3\end{Bmatrix}_A=\left\{\begin{array}{cc|c|c}0 & 0 & -6 & 0\\ 1 & 3+ & 0\ \wedge & 1\\ 0 & 3 & 3 & 0\end{array}\right\}_B=\begin{Bmatrix}0 & -3\\ 1 & 3\\ 0 & -3\end{Bmatrix}_B$

2) $\overrightarrow{M}(O,T).\overrightarrow{R}=\begin{array}{|c|c}-3 & 0\\ 3\ . & 1\\ 3 & 0\end{array}=3=\overrightarrow{M}(A,T).\overrightarrow{R}=\begin{array}{|c|c}0 & 0\\ 3. & 1\\ 3 & 0\end{array}=\overrightarrow{M}(B,T).\overrightarrow{R}=\begin{array}{|c|c}-3 & 0\\ 3\ . & 1\\ -3 & 0\end{array}$ normal. On vient de calculer la moitié de l'automoment qui est indépendant du point de réduction choisi.

3) $\overrightarrow{M}(O,T).\overrightarrow{OB}=\begin{array}{|c|c}-3 & 6\\ 3\ . & 0\\ 3 & 0\end{array}=-18=\overrightarrow{M}(B,T).\overrightarrow{OB}=\begin{array}{|c|c}-3 & 6\\ 3\ . & 0\\ -3 & 0\end{array}$ c'est un un champ équiprojectif

4) l'automoment n'est pas nul donc ce n'est pas un glisseur

Exercice :

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé direct. Deux points A et B sont définis par leurs coordonnées : $A(0,1,0)$ et $B(0,4,0)$. On définit les deux glisseurs suivants :

$$\{T_1\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_1}=2\vec{z}\\ \overrightarrow{M_1}(A)=\vec{0}\end{matrix}\right\}_A \quad \text{et} \quad \{T_2\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_2}=5\vec{z}\\ \overrightarrow{M_2}(B)=\vec{0}\end{matrix}\right\}_B$$

Travail demandé :

1. *Déterminer les éléments de réduction en O du torseur* $\{T\}$ *somme de* $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$
2. *Déterminer les coordonnées du point K où ce torseur somme* $\{T\}$ *est un glisseur*
3. *Représenter les éléments de réduction de ces torseurs dans le plan* $R(O,\vec{y},\vec{z})$
4. *Trouver une méthode graphique pour déterminer la coordonnée suivant* $\vec{y}$ de K.

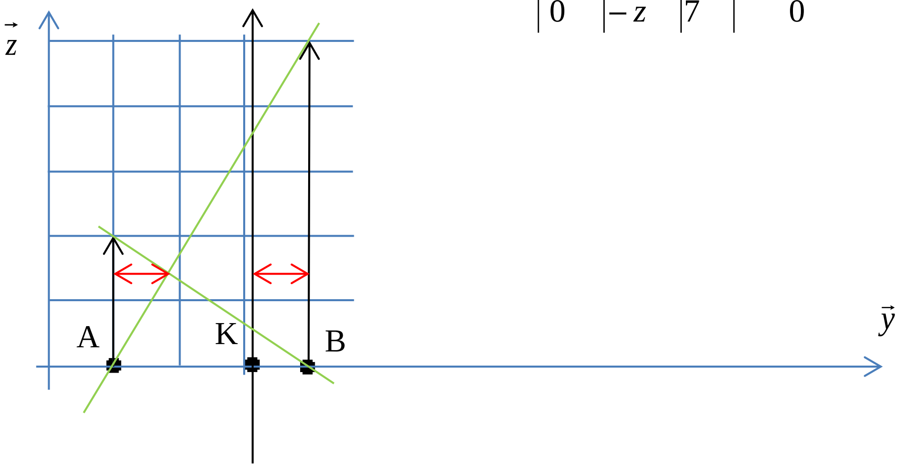
Corrigé

1) $$\{T_1\}=\left\{\begin{matrix}0&0\\0&0\\2&0\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}0\\0\\2\end{matrix}\quad\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}+\left|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right.\wedge\left|\begin{matrix}0\\0\\2\end{matrix}\right.\right\}_O=\left\{\begin{matrix}0&2\\1&0\\0&0\end{matrix}\right\}_O \quad \text{et} \quad \{T_2\}=\left\{\begin{matrix}0&0\\0&0\\5&0\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}0\\0\\5\end{matrix}\quad\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}+\left|\begin{matrix}0\\4\\0\end{matrix}\right.\wedge\left|\begin{matrix}0\\0\\5\end{matrix}\right.\right\}_O=\left\{\begin{matrix}0&20\\0&0\\5&0\end{matrix}\right\}_O$$

Donc $$\{T\}=\{T_1\}+\{T_2\}=\left\{\begin{matrix}0&2\\0&0\\2&0\end{matrix}\right\}_0+\left\{\begin{matrix}0&20\\0&0\\5&0\end{matrix}\right\}_0=\left\{\begin{matrix}0&22\\0&0\\7&0\end{matrix}\right\}_O$$

2)K est tel que $\overrightarrow{M}(K,T)=\vec{0}=\overrightarrow{M}(O,T)+\overrightarrow{KO}\wedge\vec{R}=\left|\begin{matrix}22\\0\\0\end{matrix}\right.+\left|\begin{matrix}-x\\-y\\-z\end{matrix}\right.\wedge\left|\begin{matrix}0\\0\\7\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}-7y+22\\7x\\0\end{matrix}\right.$ d'où x=0 ; y=22/7

3)



Graphiquement : on relie les extrémités opposées des résultantes. On reporte la dimension rouge comme sur le schéma. Si nos glisseurs sont des forces, cela correspond à la détermination d'une force résultante à 2 forces.