Exercice :

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe. On considère les vecteurs :

$$\vec{u} = \frac{1}{9}(-7\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}) \ ; \quad \vec{v} = \frac{1}{9}(4\vec{i} - \vec{j} - 8\vec{k}) \ ; \quad \vec{w} = \frac{1}{9}(4\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k})$$

Questions et travail demandé :

1. *Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée.*
2. *Cette base est-elle directe ?*

Corrigé

1) $\|\vec{u}\| = \frac{1}{9}\sqrt{49+16+16} = 1$ $\quad \|\vec{v}\| = 1$ $\quad \|\vec{w}\| = 1$ $\quad$ ces vecteurs sont unitaires

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{81}\begin{vmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{81}\begin{vmatrix} -36 \\ -72 \\ -9 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} -4 \\ -8 \\ -1 \end{vmatrix} = -\vec{w}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \frac{1}{81}\begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{81}\begin{vmatrix} 63 \\ -36 \\ 36 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{vmatrix} = -\vec{u}$$

$$\vec{w} \wedge \vec{u} = \frac{1}{81}\begin{vmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{81}\begin{vmatrix} -36 \\ 9 \\ 72 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{vmatrix} = -\vec{v}$$

2) La base est indirecte. Pour qu'elle soit directe il aurait fallu avoir :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$
$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$$
$$\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v}$$

Exercice :

Déterminer les composantes d'un vecteur orthogonal à $\vec{V}$ de composantes (1, 2, 3) dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Corrigé

Soit $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{V} = 0$

$\vec{u}(x, y, z)$ est tel que $x + 2y + 3z = 0$

1 équation 3 inconnues. On choisit $y = 1$ $z = 1$ et $x = -5$

$\vec{u}(-5, 1, 1)$ est orthogonal à $\vec{V}$

Exercice :

On donne trois points A, B et C dans le repère orthonormé direct R $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: A(1,2,3), B(-1,2,-1), C(0,1,2). Soit π le plan défini par ces trois points.

Travail demandé :

1. *Déterminer le vecteur unitaire* $\vec{n}$ *orthogonal (ou normal) au plan* π.

Soit le vecteur $\vec{V} = \vec{x} + \vec{y} - 2\vec{z}$ *que l'on cherche à exprimer sous la forme* $\vec{V} = a.\vec{n} + b.\vec{t}$ *avec* $\vec{t}$ *vecteur unitaire orthogonal à* $\vec{n}$*, a et b scalaires algébriques.*

2. *Déterminer a puis b et enfin* $\vec{t}$ *pour b choisi positif.*

Corrigé

1) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ d'où $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

2) $\vec{V}.\vec{n} = a = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} = \dfrac{-3}{\sqrt{6}}$ d'où $b\,\vec{t} = \vec{V} - a\,\vec{n} = \begin{vmatrix} 0 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{vmatrix} = 3/2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$

Exercice :

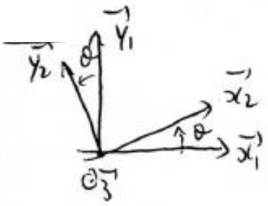
On considère les deux bases orthonormées directes suivantes : $b_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ et $b_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$.

On passe de la base b_1 à la base b_2 par une rotation d'angle θ autour de $\vec{z}$.

Travail demandé :

1. *Tracer la figure géométrale montrant le passage de la base b_1 à la base b_2.*
2. *Exprimer le produit vectoriel $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2$ en fonction de l'angle θ.*
3. *Soient $\overrightarrow{AB} = b.\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{AC} = c.\vec{x}_2$; b et c étant des longueurs exprimées en mètre.*
4. *Exprimer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ en fonction de b, c et de l'angle θ.*
5. *En déduire $\dfrac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|}{2}$. Quelle est son unité ? Que représente-elle ?*

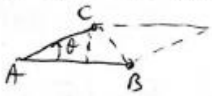
Corrigé



$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = \sin\theta\, \vec{z}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = b\vec{x}_1 \wedge c\vec{x}_2 = bc\sin\theta\, \vec{z}$

$\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} = \dfrac{bc\sin\theta}{2}$ unité m^2 → représente l'aire du triangle ABC



(Hauteur c sin θ
base b)

Exercice :

Soit $R\left(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}\right)$ un repère orthonormé direct :

Calculer la distance du point E(1,-1,2) au plan P_3 : 2x+3y-4z = 6

Corrigé

Point F (7/2,1,1) $\in$ P_3

Vecteur normal à P_3 : $\overrightarrow{n_3} = \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ -4 \end{array} \right.$ d'où $d(E,P_3) = \dfrac{\left|\overrightarrow{FE}\,.\,\overrightarrow{n_3}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_3}\right\|} = \dfrac{15}{\sqrt{29}}$

Exercice :

Soit $R(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ un repère orthonormé direct :

- $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan ($\overrightarrow{x_1}$ O $\overrightarrow{x_2}$) tel que ($\overrightarrow{x_1}$, $\vec{u}$) = θ
- $\vec{v}$ un vecteur unitaire du plan ($\vec{u}$ O $\overrightarrow{x_3}$) tel que ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = φ
- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ défini par $\overrightarrow{OA}$ = a. $\vec{u}$
- Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ défini par $\overrightarrow{AM}$ = m. $\vec{v}$

En fonction des paramètre a, m, θ, φ :

Questions et travail demandé :

1. *Définir les composantes (X_m,Y_m,Z_m) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur la base B liée à R*
2. *Exprimer la norme de $\overrightarrow{OM}$*
3. *Déterminer les coordonnées sphériques du point M : (r,θ_S,φ_S)*

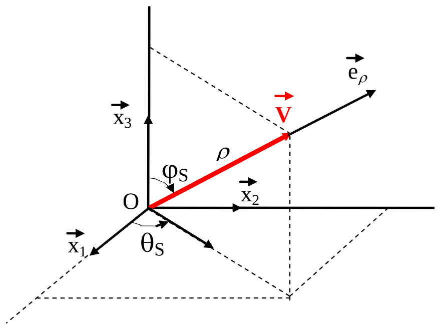
Corrigé

1) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ =(a. $\vec{u}$ + m. $\vec{v}$)

X_m= cos θ.(a + m cosφ)
Y_m= sin θ.(a + m cosφ)
Z_m= -m.sinφ

2) $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = a^2+m^2+2am(\cos\varphi) \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{a^2+m^2+2am(\cos\varphi)}}$

3)



$$\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{a^2+m^2+2am(\cos\varphi)}$$

$$\begin{cases} \rho \sin\varphi_S \cos\theta_S = \cos\theta(a + m\cos\varphi) \\ \rho \sin\varphi_S \sin\theta_S = \sin\theta(a + m\cos\varphi) \\ \rho\cos\varphi_S = -m\sin\varphi \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \theta_S = \theta \quad \text{et} \quad \varphi_S = \arctan\left(\frac{a + m\cos\varphi}{-m\sin\varphi}\right)$$

Exercice :

Soit $R\left(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}\right)$ un repère orthonormé direct :

- $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan ($\overrightarrow{x_1}$ O $\overrightarrow{x_2}$) tel que ($\overrightarrow{x_1}$, $\vec{u}$) = α
- $\vec{v}$ un vecteur unitaire du plan ($\overrightarrow{x_1}$ O $\overrightarrow{x_2}$) tel que ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = β
- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ défini par $\overrightarrow{OA} = a.\vec{u}$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par $\overrightarrow{AB} = b.\vec{v}$

En fonction des paramètre a, b, α, β

Questions et travail demandé :

1. *Définir les composantes (X_b,Y_b,Z_b) du vecteur $\overrightarrow{OB}$ sur la base B lié à R*
2. *Calculer la norme de $\overrightarrow{OB}$*
3. *Définir l'angle φ = ($\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{OB}$) de $\overrightarrow{OB}$ par rapport à l'axe O $\overrightarrow{x_1}$*
4. *Effectuer les applications numériques pour a = 50mm, b= 30mm, α=25° et β=40°*

Corrigé

1)

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ =(a. $\vec{u}$ +b. $\vec{v}$)

X_b= a cos α + b cos (α+β)

Y_b= a sin α + b sin (α+β)

Z_b=0

$$\begin{array}{lll} x_1 & u & v \\ x_2 & u' & v' \\ x_3 \xrightarrow{\alpha} & u'' \xrightarrow{\beta} & v'' \end{array} \quad \textit{ce qui donne} \quad \begin{array}{ll} x_1 & v \\ x_2 & v' \\ x_3 \xrightarrow{\alpha+\beta} & v'' \end{array}$$

2)

$$\left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2 = a^2+b^2+2ab\cos(\alpha+\beta) \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha+\beta)}}$$

3)

φ = ($\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{OB}$) $\qquad \cos(\varphi) = \dfrac{\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}$

4)

X_b= 58mm $\qquad$ Y_b= 48,32mm $\qquad$ Z_b= 0mm

$\left\|\overrightarrow{OB}\right\|$ =75.49mm

Cos(φ) =0,768 ⇒ $\boxed{\varphi = 39{,}8°}$

Exercice :

Soit $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct : on définit par leur coordonnées trois points A(1,1,1) B(-1,3,1) et C(1,6,-4)

Questions et travail demandé :

1. *Calculer en radian le module de l'angle que font entre eux* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
2. *Que représente géométriquement un produit vectoriel ?*
3. *Calculer l'aire du triangle ABC*
4. *Donner une équation cartésienne du plan ABC*
5. *Soit un vecteur* $\vec{u}$ *(3,1,-1) montrer par deux méthodes différentes que* $\vec{u}$ *appartient au plan ABC.*

Corrigé

1. Détermination de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = -2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ $\quad \overrightarrow{AC} = 5\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$

   Calcul de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \sqrt{8}\times\sqrt{50}\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 10$

   Donc $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{10}{2\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

   D'où : $\boxed{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}}$

2. Représentation du produit vectoriel aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

   $|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|$ = aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. Calcul de l'aire du triangle = $|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|\,2$

   $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = (-2\,\vec{i} + 2\,\vec{j})\wedge(5\,\vec{j} - 5\,\vec{k}) = -10\,\vec{k} - 10\,\vec{j} - 10\,\vec{i}$

   D'où $|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|^2 = 300$ ce qui donne $|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}| = 10.\sqrt{3}$

   $\boxed{\text{D'où l'aire du triangle ABC} = 5.\sqrt{3}}$

4. Equation du plan : Soit un point P du plan et soit $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$
   - Calcul de $\overrightarrow{AP}$: $\overrightarrow{AP} = (x-1).\,\vec{i} + (y-1).\,\vec{j} + (z-1).\,\vec{k}$
   - Calcul de $\overrightarrow{AP}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 0$

   $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire au plan ABC → -10*(x-1)-10*(y-1)-10*(z-1) = 0

   $\boxed{\text{Equation du plan : } x + y + z - 3 = 0}$

5. Vérification soit directement avec l'équation ou soit en recalculant le produit mixte.

Exercice :

Soit $R\left(O,\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}\right)$ un repère orthonormé direct :

- $\vec{u}$ un vecteur unitaire du plan ($\vec{x_1}$ O $\vec{x_2}$) tel que ($\vec{x_1}$, $\vec{u}$)= α 0<α<90°
- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ défini par $\overrightarrow{OA}$= a. $\vec{x_1}$ a>0
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par $\overrightarrow{AB}$ = b. $\vec{u}$ b>0
- Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ défini par $\overrightarrow{OC}$ = c. $\vec{x_3}$ c>0

Questions et travail demandé :

1. *Donner les composantes de $\vec{w}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB}$ dans R*
2. *Représenter le vecteur $\vec{w}$ et expliciter ses propriétés*
3. *Déterminer un système de deux équations cartésiennes définissant la droite (D) passant par A et B*
4. *Calculer le produit mixte [$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}$] = $\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}$*
5. *Donner une équation du plan (P) passant par les points O, A et B*
6. *Le point C appartient-il au plan (P) ?*

Corrigé

1) $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB}$ = a.b. $\vec{x_1}\wedge\vec{u}$ =a.b.sin α $\vec{x_3}=ab\ {}_R\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}\wedge{}_R\begin{vmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\0\end{vmatrix}=ab\ {}_R\begin{vmatrix}0\\0\\\sin\alpha\end{vmatrix}$

2) $\vec{w}$ orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA}$ et de norme = ab|sin α|

3) Equation de (D)

M(x,y,z) ∈D ⇒ $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-a\\y\\z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-z\sin\alpha\\z\cos\alpha\\(x-a)\sin\alpha-y\cos\alpha\end{vmatrix}=\vec{0}$

D'où D définie par les équations : z = 0 et x cosα –y sinα = a cosα

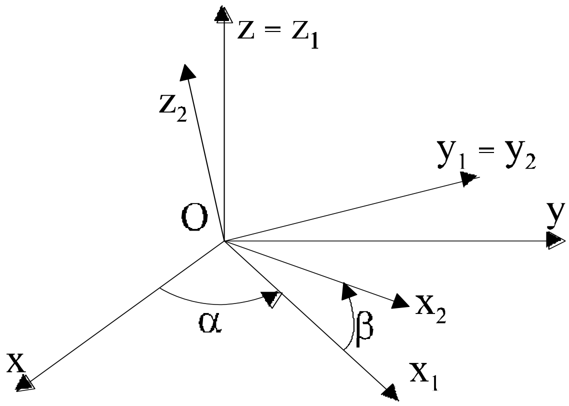
4) [$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}$] = abc sin α
5) M ∈D ⇒ $\overrightarrow{AM}.\vec{w}$= 0 ou [$\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$]=0 ou $\overrightarrow{AM}$ = j $\overrightarrow{OA}$+ k $\overrightarrow{AB}$

Equation du plan P : z = 0

6) Non, [$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}$]=[$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$]≠ 0 ou c≠0

Exercice :

Dans l'espace vectoriel R^3, on considère trois bases orthonormées directes $B\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$, $B_1\{\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}\}$, $B_2\{\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2\}$; définies comme l'indique la figure ci contre



On passe d'un repère à l'autre de la façon suivante :

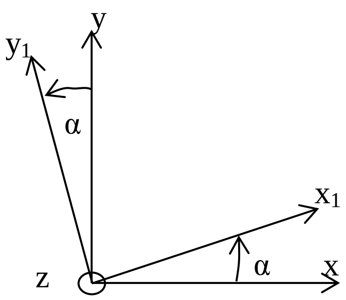
$$\boxed{B\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\} \xrightarrow{rot(\alpha,\vec{z})} B_1\{\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}\} \xrightarrow{rot(\beta,\vec{y}_1)} B_2\{\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2\}}$$

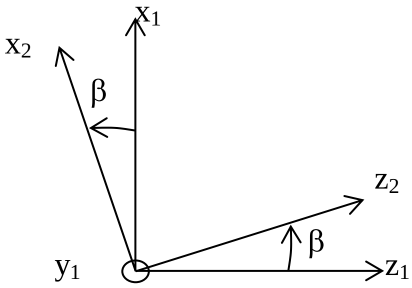
Questions et travail demandé :

1. Faire les figures planes de changement de base.
2. Déterminer $\vec{z}.\overrightarrow{x_2}$ et $\vec{x}_2\cdot\vec{x}$
3. Déterminer les expressions les plus simples de $\vec{x}\wedge\vec{y}_1$ et $\vec{y}\wedge\vec{z}_2$

Corrigé

1)



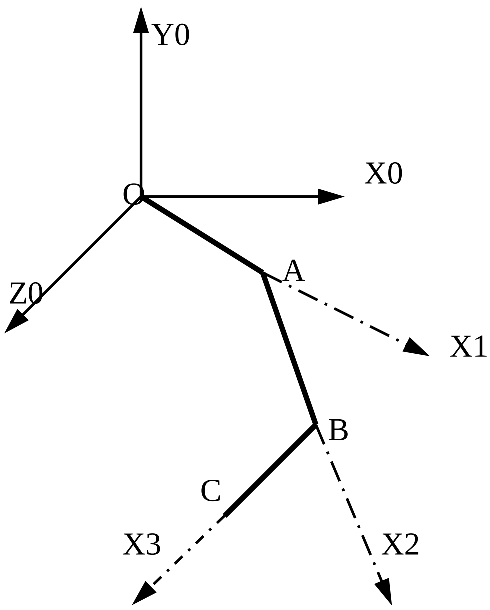


2) $\vec{z}.\overrightarrow{x_2} = \begin{vmatrix}0\\0.\\1\end{vmatrix}_{B_1} \begin{vmatrix}\cos\beta\\0\\-\sin\beta\end{vmatrix}_{B_1} = -\sin\beta$ $\qquad \overrightarrow{x_2}.\vec{x} = \begin{vmatrix}\cos\beta\\0\\-\sin\beta\end{vmatrix}_{B_1} . \begin{vmatrix}\cos\alpha\\-\sin\alpha\\0\end{vmatrix}_{B_1} .= \cos\beta.\cos\alpha$

3) $\vec{x}\wedge\overrightarrow{y_1} = \begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}_{B} \wedge \begin{vmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\\0\end{vmatrix}_{B} = \begin{vmatrix}0\\0\\\cos\alpha\end{vmatrix}_{B} = \cos\alpha\,\vec{z}$ $\qquad \vec{y}\wedge\overrightarrow{z_2} = \begin{vmatrix}\sin\alpha\\\cos\alpha\\0\end{vmatrix}_{B_1} \wedge \begin{vmatrix}\sin\beta\\0\\\cos\beta\end{vmatrix}_{B_1} = \begin{vmatrix}\cos\alpha.\cos\beta\\-\sin\alpha.\cos\beta\\-\cos\alpha.\sin\beta\end{vmatrix}_{B_1}$

Exercice :

Soit $R\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ un repère orthonormé direct :



- $\overrightarrow{x_1}$ un vecteur unitaire du plan ($\overrightarrow{x_0}$ O $\overrightarrow{y_0}$) tel que ($\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{x_1}$) = α
- $\overrightarrow{x_2}$ un vecteur unitaire du plan ($\overrightarrow{x_1}$ A $\overrightarrow{z_0}$) tel que ($\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$) = β
- $\overrightarrow{x_3}$ un vecteur unitaire du plan ($\overrightarrow{x_2}$ B $\overrightarrow{y_1}$) tel que ($\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{x_3}$) = γ
- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ défini par $\overrightarrow{OA}$= a. $\overrightarrow{x_1}$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par $\overrightarrow{AB}$ = b. $\overrightarrow{x_2}$
- Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ défini par $\overrightarrow{BC}$ = c. $\overrightarrow{x_3}$

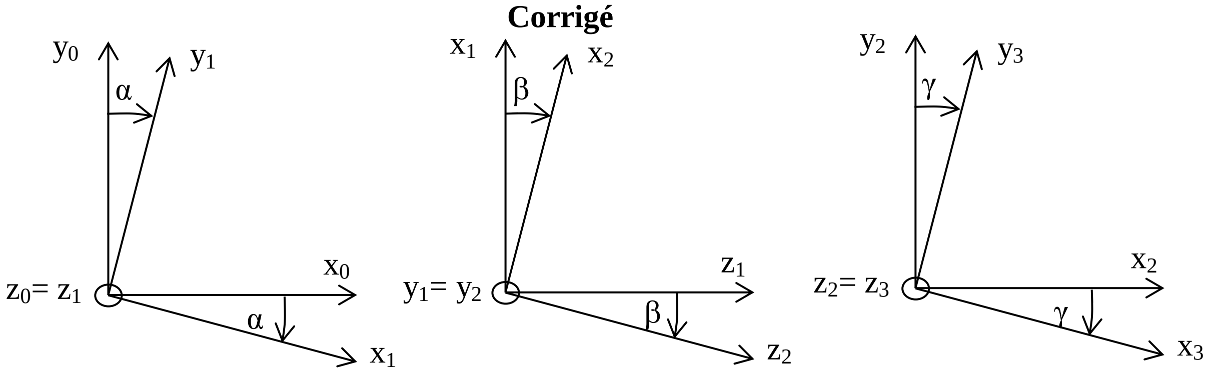
Questions et travail demandé :

En fonction des paramètres a, b, c, α, β,γ

1. *Tracer dans les repères adéquats les angles α, β,γ*
2. *Définir les composantes (Xc,Yc,Zc) du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sur la base B_0 lié à R_0*
3. *Calculer le plus simplement possible la norme de $\overrightarrow{OC}$*
4. *Déterminer les composantes les plus simples de $\vec{w}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{BC}$*

Corrigé

1)



$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3\\ y_0 & & y_1 & \xrightarrow{\beta} & y_2 & & y_3 \\ z_0 & \xrightarrow{\alpha} & z_1 & & z_2 & \xrightarrow{\gamma} & z_3\end{array}$$

2) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(a\overrightarrow{x_1}+b\overrightarrow{x_2}+c\overrightarrow{x_3})=a\overrightarrow{x_1}+b\cos\beta\overrightarrow{x_1}-b\sin\beta\overrightarrow{z_1}+c\cos\gamma\overrightarrow{x_2}+c\sin\gamma\overrightarrow{y_2}$

d'où $\overrightarrow{OC}=\left|\begin{array}{c} a+b\cos\beta+c\cos\gamma\cos\beta \\ c\sin\gamma \\ -b\sin\beta-c\cos\gamma\sin\beta \end{array}\right._{R_1} = \left|\begin{array}{c} a+(b+c\cos\gamma)\cos\beta-c\sin\gamma\sin\alpha \\ a+(b+c\cos\gamma)\sin\beta+c\sin\gamma\cos\alpha \\ -(b+c\cos\gamma)\sin\beta \end{array}\right._{R_0}$

3) expression la plus simple dans R_1 : d'où

$$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{(a+b\cos\beta+c\cos\gamma\cos\beta)^2+(c\sin\gamma)^2+(b\sin\beta+c\cos\gamma\sin\beta)^2}$$

4) on prend la base d'expression la plus proche R_2 :

$$\vec{w}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{BC}=a\overrightarrow{x_1}\wedge c\overrightarrow{x_3}=\left|\begin{array}{c} a\cos\beta \\ 0 \\ a\sin\beta \end{array}\right._{R_2} \wedge \left|\begin{array}{c} c\cos\gamma \\ c\sin\gamma \\ 0 \end{array}\right._{R_2} = ac\left|\begin{array}{c} -\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma \end{array}\right._{R_2}$$