

1 Systèmes linéaires et inversion de matrices

- Pas de théorie mais méthodes à connaître
- Généralités : système linéaire d'équations scalaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), système homogène associé. Forme matricielle d'un système linéaire ($AX = B$).
- Résolution des systèmes : cas des systèmes triangulaires à coefficients diagonaux non nuls (une unique solution). Cas général : transformation en système échelonné par pivot de Gauss, opérations élémentaires sur les lignes, résolution d'un système échelonné : vérification de la compatibilité puis introduction d'autant de paramètres qu'il y a d'inconnues secondaires.
- **Système homogène** : il est toujours compatible. L'ensemble des solutions est stable par somme et multiplication par un scalaire (*) (à traduire en quantificateurs + démo)
Pour un système avec second membre compatible, description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé.
- Les réflexes suivants doivent être acquis :
 - Commencer par mettre un système sous forme "normalisée" (inconnues à gauche alignées verticalement, second membre à droite).
 - Échelonner le système sans effectuer d'opérations interdites (du genre $L_i \leftarrow \lambda L_i + L_j$).
 - Quand le système est triangulaire, regarder si un des coefficients diagonaux est nul.
- Étude d'inversibilité de matrice et inversion (le cas échéant) : pas de théorie, simplement savoir appliquer la méthode, à tester uniquement sur des matrices de taille 3 maximum avec des coefficients numériques.

2 Suites particulières

- Suite arithmético-géométrique. Calcul du terme général.
Les suites arithmétiques et géométriques n'ont pas été revues mais sont bien évidemment à connaître sans hésitation.
- Suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*.$$

Équation caractéristique.

Expression des solutions de (E) (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), expression des solutions à valeurs réelles (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

3 Relations binaires

Uniquement en question de cours !

- Relation d'ordre (relation réflexive, transitive, antisymétrique). Ordre partiel, total.
Exemples : ordre usuel dans $\mathbb{R}$, inclusion dans $\mathcal{P}(E)$.
Définition de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Question de cours : la divisibilité dans $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre, celle dans $\mathbb{Z}$ n'en est pas une.
- Relation d'équivalence (relation binaire réflexive, transitive, symétrique). Congruences dans $\mathbb{Z}$. Question de cours : c'est une relation d'équivalence.

4 Exercices

1. Soit λ un paramètre réel et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Avec une autre matrice ça va aussi, à condition que les calculs restent raisonnables !

On considère le système $(S) : MX = \lambda X$, d'inconnue X (matrice colonne).

Résoudre (S) en discutant suivant la valeur de λ .

2. Une matrice 3×3 à inverser (pas trop de calculs!).

3. **D'après CCINP exercice 55**

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n \quad \text{avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

a) Prouver que E est stable par combinaison linéaire (à traduire d'abord en quantificateurs).

b) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de E . Montrer que

$$\text{si } u_0 = v_0 \text{ et } u_1 = v_1, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n.$$

c) Dans cette question, on considère une suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

Remarque : ne pas y passer trop de temps.