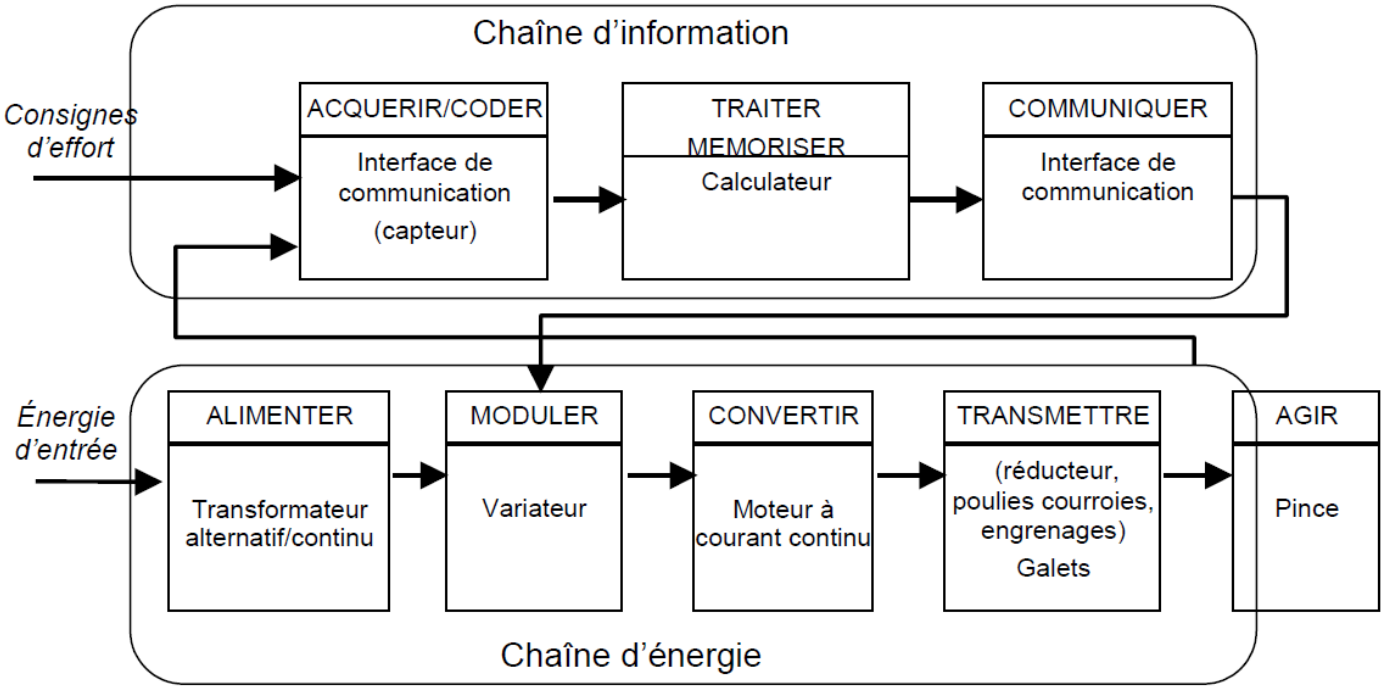
Problème :

Q1 :



Q2 : On observe aucun dépassement sur la réponse $\Delta u_{mes}(t)$, de plus la tangente à l'origine en t_0 = 1,5 µs est non nulle. On en déduit que le capteur se comporte comme un 1er ordre de la forme avec ses deux constantes : τ_{capt} et K_{capt}

$$\tau_{capt}.\frac{d\Delta u_{mes}(t)}{dt} + \Delta u_{mes}(t) = K_{capt}.\Delta F_{res}(t)$$

Q3 : On mesure $u_{mes}(\infty)$ = 12 V pour une valeur initiale de $u_{mes}(0)$ = 8 V, on en déduit donc :

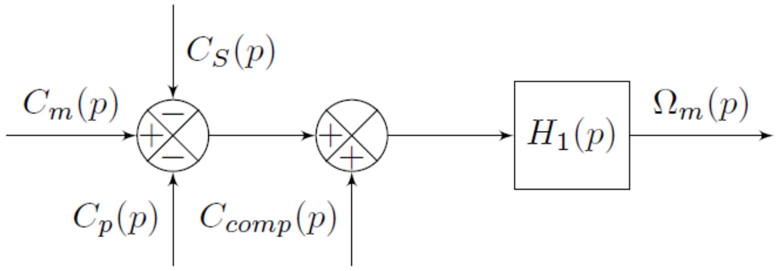
$$K_{capt} = \frac{u_{mes}(\infty) - u_{mes0}}{\Delta F_{res}} = \frac{4}{0{,}5} = 8\ V/N$$

On calcule $u_{mes}(t_0 + \tau) = 8 + (12 - 8) * 0{,}63 = 10{,}5\ V$. On mesure sur le courbe $t_0 + \tau = 3{,}5\ \mu s$ donc $\tau = 2\mu s$

Q4 : On a donc t5% = 3 τ = 6 µs, on a donc Δt >> t5%. On peut donc assimiler le comportement du capteur à un gain pur pour notre étude tel que :

$$\Delta u_{mes}(t) = K_{capt}.\Delta F_{res}(t)$$

Q5.



Q6. On sait que $\omega_m(t) = \frac{\mathrm{d}\theta_m(t)}{\mathrm{d}t}$ qui devient dans le domaine de Laplace $\Omega_m(p) = p \cdot \Theta_m(p)$ d'où $H_2(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$.

Q7. On écrit les équation (1) et (2) dans le domaine de Laplace (dans les conditions de Heaviside) :

$$(1) \implies Jp \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) - C_S(p) \implies \Omega_m(p) = \frac{1}{Jp}(C_m(p) - C_S(p))$$
$$(2) \implies C_S(p) = K_{C\theta} \cdot \Theta_m(p)$$

On en déduit alors :

$$(1) \implies H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_S(p)} = \frac{1}{Jp}$$
$$(2) \implies H_3(p) = \frac{C_S(p)}{\Theta_m(p)} = K_{C\theta}$$

Q8. On utilise la formule de Black sur la boucle interne

$$H_{int}(p) = \frac{C_S(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)}$$

on en déduit l'expression de $H_{BF}(p)$ en réappliquant Black soit :

$$H_{BF}(p) = \frac{H_{int}(p)}{1 + H_{int}(p)} \quad \text{car } H_{cor}(p) = 1$$
$$\implies H_{BF}(p) = \frac{\frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)}}{1 + \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)}} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + 2 \cdot H_1(p)H_2(p)H_3(p)}$$

Q9. On exprime alors $H_{BF}(p)$:

$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1 + 2\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}} \implies H_{BF}(p) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{J}{2K_{C\theta}}p^2}$$

Q10. Les racines sont imaginaires pures : $p_1 = i\sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}$ et $p_2 = -i\sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}$

La réponse impulsionnelle sera purement oscillante (amplitude constante) d'expression :

$$C_s(t) = \sqrt{\frac{K_{C\theta}}{2.J}}.\sin\left(\sqrt{\frac{2K_{C\theta}}{J}}t\right)$$

Le système est instable. Sa réponse indicielle sera aussi sinusoïdale.

Q11. On utilise la formule de Black sur la petite boucle interne :

$$H_1'(p) = \frac{H_1(p)}{1 + BH_1(p)}$$

On réutilise la formule de Black sur la grande boucle interne tel que :

$$G(p) = \frac{H_1'(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_1'(p)H_2(p)H_3(p)}$$
$$\implies G(p) = \frac{\frac{H_1(p)}{1+BH_1(p)}H_2(p)H_3(p)}{1 + \frac{H_1(p)}{1+BH_1(p)}H_2(p)H_3(p)}$$
$$\implies G(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + BH_1(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)}$$

On exprime maintenant $G(p)$:

$$G(p) = \frac{\frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}{1 + \frac{B}{Jp} + \frac{K_{C\theta}}{Jp^2}}$$
$$\Longrightarrow G(p) = \frac{1}{1 + \frac{B}{K_{C\theta}}p + \frac{J}{K_{C\theta}}p^2}$$

Q12. On souhaite que le dénominateur est une racine double, son discriminant doit donc être nul

$$\Delta = \frac{B^2}{K_{C\theta}^2} - 4\frac{J}{K_{C\theta}} = 0 \implies B = 2\sqrt{JK_{C\theta}}$$

on aura alors $\tau = \sqrt{\frac{J}{K_{C\theta}}}$.

Q13. On obtient simplement :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_i(1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p(1 + \tau \cdot p)^2}$$

qui d'ordre 3 et de classe 1.

Q14. On choisit alors $T_i = \tau$ de façon annuler un des termes du dénominateur. On en déduit alors :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_i(1 + \tau \cdot p)}{\tau \cdot p(1 + \tau \cdot p)^2} \implies H_{BO}(p) = \frac{K_i}{\tau \cdot p(1 + \tau \cdot p)}$$

Q15. $H_{BF}(p) = \frac{C_S(p)}{C_C(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1+H_{BO}(p)} = \frac{\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}}{1+\frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)}} = \frac{K_i}{\tau p(1+\tau p)+K_i} = \frac{1}{1+\frac{\tau}{K_i}p+\frac{\tau^2}{K_i}p} = \frac{K_{BF}}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$

D'où $K_{BF} = 1$, $\omega_0 = \frac{\sqrt{K_i}}{\tau}$ et $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_i}}$

Q16. Le diagramme des exigences autorise jusqu'à 15% de dépassement, on règle donc $\xi = 0{,}7$ pour minimiser $t_{5\%}$ soit :

$$0{,}7 = \frac{1}{2\sqrt{K_i}} \Rightarrow K_i \approx 0{,}5$$

Q17. On utiliser l'abaque du temps de réponse réduit, et on mesure $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 3$ pour $\xi = 0{,}7$.
On calcule $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}} = 35$ rad·s⁻¹. On a alors $t_{5\%} = \frac{3}{35} = 8{,}6 \cdot 10^{-2}$ s. On vérifie bien que $t_{5\%} < 0{,}5$ s ce qui satisfait l'exigence 1.2.1.3.

Q18. Il s'agit d'une fonction de transfert du 2nd ordre, tous les coefficients sont strictement positifs, les racines seront donc à partie réelle strictement négative. Le système sera donc stable.

Q19. On a alors $C(p) = \frac{1}{p}$. On calcule l'erreur statique ε_s grâce au théorème de la valeur finale (système stable) :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} C_C(t) - C_S(t) = \lim_{p\to 0} p(C_C(p) - C_S(p))$$
$$\Longrightarrow \varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p(\frac{1}{p} - H_{BF}\frac{1}{p})$$
$$\Longrightarrow \varepsilon_s = \lim_{p\to 0}(1 - \frac{1}{1 + \frac{\tau}{K_i}p + \frac{\tau^2}{K_i}p^2})$$
$$\Longrightarrow \varepsilon_s = 0$$

Exercice bonus : Où placer une action intégrale pour améliorer la précision d'un système en régulation ?

Q1 : Théorème de superposition : $S(p) = \frac{H_1\ H_2}{1\ +\ H_1\ H_2}E(p) + \frac{H_2}{1\ +\ H_1\ H_2}P(p)$

Q2 : Ecart $\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = \frac{1}{1\ +\ H_1\ H_2}E(p) - \frac{H_2}{1\ +\ H_1\ H_2}P(p)$

Soit $\varepsilon_{pert}(p)$ l'écart dû à la perturbation : $\varepsilon_{pert}(p) = \frac{-H_2}{1\ +\ H_1\ H_2}P(p)$

Q3 :

En régime permanent, $\left|\varepsilon_{pert}\right| = \lim\limits_{p\to 0} p.\ \varepsilon_{pert}(p) = \lim\limits_{p\to 0} \frac{p_0 K_2 p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2}\ +\ K_1 K_2}$ en notant $H_i(p) \approx \frac{K_i}{p^{\alpha_i}}$

- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$: $\left|\varepsilon_{pert}\right| = \frac{p_0 K_2}{1\ +\ K_1 K_2}$
- $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 > 0$: $\left|\varepsilon_{pert}\right| = \frac{p_0}{K_1}$
- $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 = 0$: $\left|\varepsilon_{pert}\right| = 0$
- $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$: $\left|\varepsilon_{pert}\right| = 0$

Q4 : *Si la fonction de transfert située* ***avant*** *la perturbation comporte au moins un intégrateur, la perturbation n'a en échelon pas d'effet sur la précision : on dit que le système rejette la perturbation.*