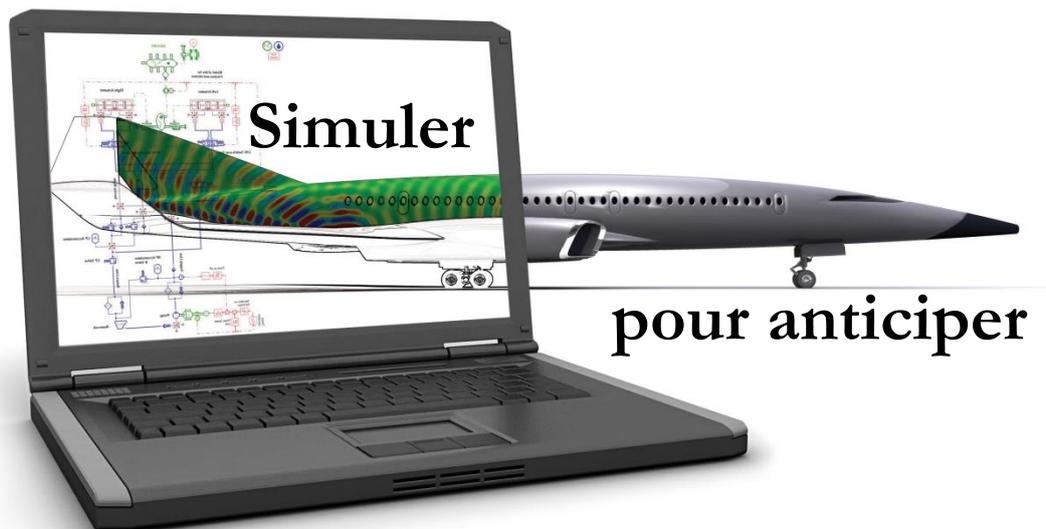


CINEMATIQUE

La cinématique est l'étude des mouvements sans tenir compte des forces qui les produisent.

Extraits du référentiel :

| Compétence visée | <i>Savoir-faire associé</i> |
|--|---|
| <p>Proposer un modèle de connaissance et de comportement</p> | <ul style="list-style-type: none"> • <i>Paramétrer les mouvements d'un solide indéformable</i> • <i>Associer un repère à un solide</i> • <i>Identifier les degrés de liberté d'un solide par rapport à un autre solide</i> • <i>Prendre en compte les symétries ou les restrictions de mouvement pour simplifier le modèle (cinématique plane) : centre instantané de rotation et champ de vecteur-vitesses</i> • <i>Déterminer le torseur cinématique d'un solide par rapport à un autre solide</i> • <i>Associer à chaque liaison son torseur cinématique</i> |
| <p>Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique</p> | <ul style="list-style-type: none"> • <i>Déterminer la loi entrée - sortie géométrique d'une chaîne cinématique.</i> • <i>Déterminer les relations de fermeture de la chaîne cinématique</i> • <i>Déterminer la loi entrée - sortie cinématique d'une chaîne cinématique</i> |



*Sciences Industrielles de l'Ingénieur
1ère année de CPGE
Lycée Claude Fauriel*

Illustration : comportement dynamique d'un véhicule auto-balancé segway
(Extrait Centrale PSI 05)

Le support de l'étude est le véhicule auto balancé SEGWAY®. Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville.

La conduite du SEGWAY® se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement (comme pour la marche à pied dans laquelle le piéton s'incline vers l'avant pour débiter le mouvement). Les virages à droite et à gauche sont quant à eux commandés par la rotation de la poignée directionnelle située sur la droite du guidon (voir photographies).

La spécificité de ce véhicule est d'avoir deux roues qui ont le même axe de rotation, avec son centre de gravité situé au-dessus de l'axe commun des roues, si bien qu'on se demande comment rester à l'équilibre une fois monté sur la plate-forme.

Tout comme le cerveau permet à l'homme de tenir debout sans tomber grâce à l'oreille interne, le système comporte un dispositif d'asservissement d'inclinaison, maintenant la plate-forme du véhicule à l'horizontale ou encore la barre d'appui, supposée orthogonale à cette plate-forme, à la verticale. Le SEGWAY® comporte à cet effet des capteurs et des microprocesseurs transmettant des consignes aux deux moteurs électriques équipant les deux roues.

L'objectif de cette étude est de vérifier les performances de vitesse et d'accélération et la stabilité en ligne droite. Pour cela il faut déterminer les relations entre les inclinaisons du conducteur et l'accélération ou décélération du SEGWAY® dans une phase de fonctionnement ainsi que les équations mécaniques nécessaires au **modèle d'asservissement** d'inclinaison.

On propose de s'appuyer sur une description structurelle du véhicule, composé (voir figure ci-dessous) :

- d'un **chariot** (châssis + 2 roues uniquement), transportant le conducteur,
- de deux **moto-réducteurs** entraînant les roues (un par roue),
- d'un ensemble constitué d'un **gyromètre** et d'un **pendule** délivrant une information sur l'angle d'inclinaison du châssis par rapport à la verticale et sur sa dérivée,
- d'un **calculateur** élaborant, à partir des informations issues des capteurs, les consignes de **commande** des groupes moto-réducteurs.
- de **batteries** fournissant l'énergie aux divers composants.

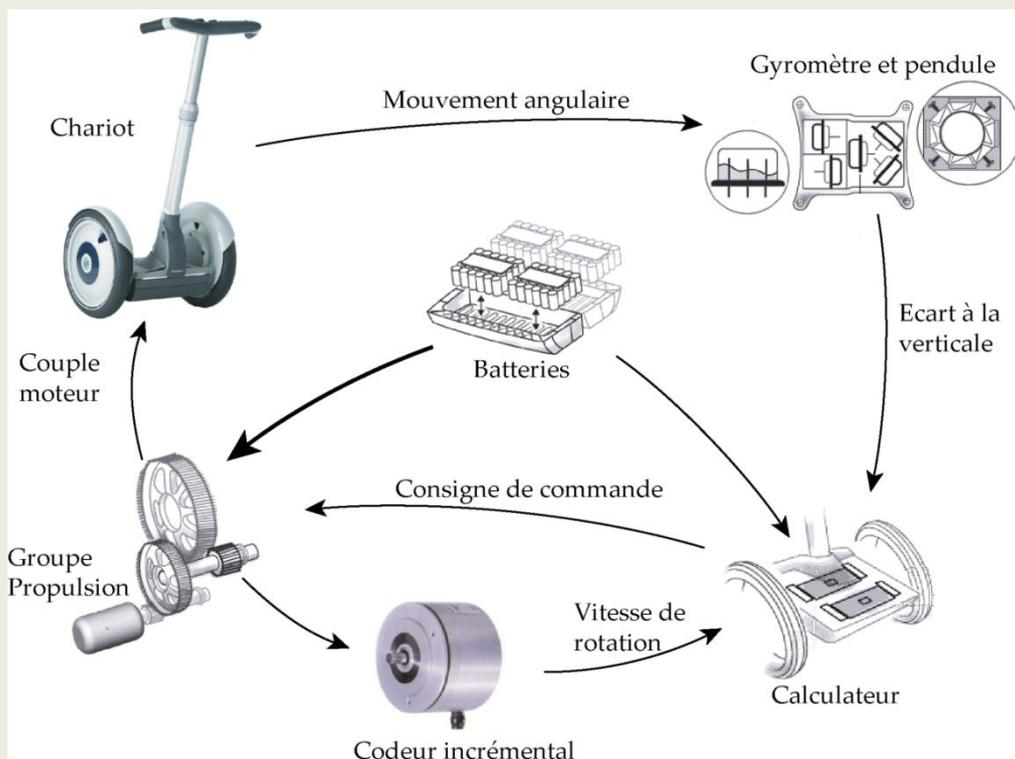


Schéma d'organisation structurelle

Modèle de comportement mécanique : Voir schéma page suivante.

Paramétrage cinématique du système :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère, supposé galiléen, lié à la route et tel que la direction \vec{z}_0 soit dirigée suivant la verticale ascendante.
- $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère de centre A, point milieu de l'axe des roues, tel que la base b_1 soit en rotation par rapport à la base b_0 autour de la direction $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ et que la direction \vec{x}_1 soit colinéaire à l'axe commun des roues ; on pose $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ l'angle de virage.
- $R_2(A, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est un repère lié au châssis du chariot (noté **S** ou **2**) tel que la base b_2 soit en rotation autour de la direction $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ par rapport à la base b_1 et que la direction \vec{z}_2 soit colinéaire à la barre d'appui ; on pose $\psi = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ l'angle d'inclinaison du châssis par rapport à la verticale (l'asservissement consiste à maintenir cet angle nul). On suppose que le point A est le centre de gravité du chariot de masse m_S .
- $R_3(A, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est un repère tel que la base b_3 soit en rotation par rapport à la base b_2 autour de la direction $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$; on pose $\alpha = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ l'angle d'inclinaison arrière / avant du conducteur.
- $R_4(A, \vec{x}_4, \vec{y}_3, \vec{z}_4)$ est un repère lié au conducteur (noté **H** ou **4**), considéré comme un solide indéformable, tel que la base b_4 soit en rotation par rapport à la base b_3 autour de la direction $\vec{y}_3 = \vec{y}_4$ et tel que l'axe (A, \vec{z}_4) passe par le centre de gravité G du conducteur défini par $\overrightarrow{AG} = h \cdot \vec{z}_4$ (avec h une constante positive) ; on pose $\beta = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ l'angle d'inclinaison gauche / droite du conducteur.
- $R_D(O_D, \vec{x}_1, \vec{y}_D, \vec{z}_D)$, où O_D est le centre de gravité de la roue droite, est un repère lié à la roue droite R_D : la base b_D est en rotation par rapport à la base b_2 autour de la direction $\vec{x}_2 = \vec{x}_D$ et on pose alors $\theta_D = (\vec{y}_2, \vec{y}_D) = (\vec{z}_2, \vec{z}_D)$ l'angle de rotation de la roue droite par rapport au châssis. I_D est le point de contact de la roue droite avec la route et est donc tel que $\overrightarrow{I_D O_D} = R \cdot \vec{z}_0$.
- $R_G(O_G, \vec{x}_1, \vec{y}_G, \vec{z}_G)$, où O_G est le centre de gravité de la roue gauche, est un repère lié à la roue gauche R_G : la base b_G est en rotation par rapport à la base b_2 autour de la direction $\vec{x}_2 = \vec{x}_G$ et on pose alors $\theta_G = (\vec{y}_2, \vec{y}_G) = (\vec{z}_2, \vec{z}_G)$ l'angle de rotation de la roue gauche par rapport au châssis. I_G est le point de contact de la roue gauche avec la route et est donc tel que $\overrightarrow{I_G O_G} = R \cdot \vec{z}_0$.

Les deux roues R_D et R_G ont donc le même rayon R et roulent sans glisser sur le sol au niveau des deux points de contacts I_D et I_G . On note m_r la masse d'une roue. La masse du conducteur est notée m_H .

On note L l'empattement du chariot tel que $\overrightarrow{O_D O_G} = L \cdot \vec{x}_1$ et donc $\overrightarrow{O_D A} = \overrightarrow{A O_G} = \frac{L}{2} \cdot \vec{x}_1$.

La pesanteur est définie par $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$.

Extrait du cahier des charges dans la phase du cycle de vie : déplacement en ligne droite

| Exigence | Critère | Niveau |
|---|---|-------------------------------|
| Permettre au conducteur de se déplacer aisément dans un milieu urbain | Vitesse | 0 ~ 20 km/h |
| | Accélération et décélération en fonctionnement normal | 1,5 m.s ⁻² minimum |
| | Distance d'arrêt maximale | 3 m à 20 km.h ⁻¹ |
| | autonomie | 30 km |

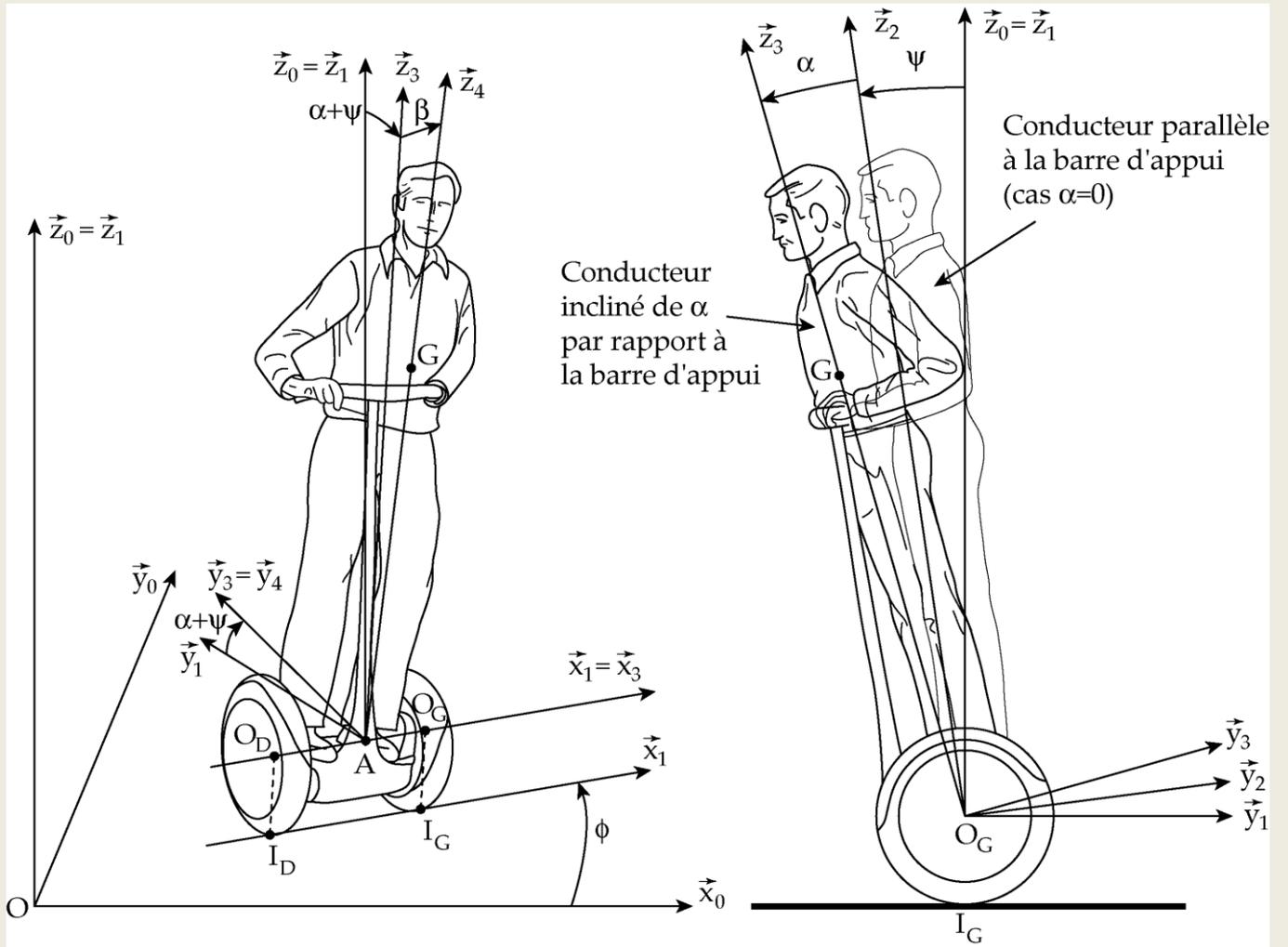


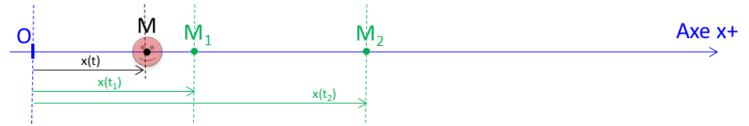
Figure simplifiée dans le cas $\beta = 0$ soit $\vec{z}_3 = \vec{z}_4$

1 – Cinématique du point

1.1 .Mouvements particuliers

1.1.1 - Cinématique à 1 dimension : la trajectoire est rectiligne

- coordonnée cartésienne du point mobile : $x(t)$
- Origine O/ M \equiv O à $t = 0$
- Sens et unité de mesure choisis



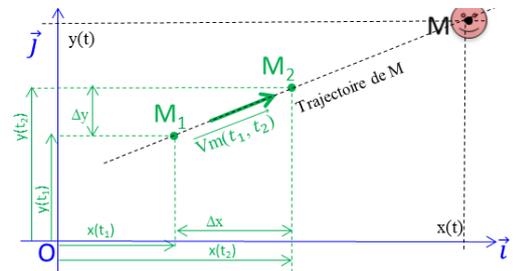
Vitesse moyenne entre t_1 et $t_2 = V_m(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Vitesse instantanée = $V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$ en m/s

Accélération instantanée = $a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ en m/s^2

1.1.2 - Cinématique à 2 dimensions : exemple du Mouvement à trajectoire rectiligne

- Origine O du repère cartésien
- Vecteurs unitaires du repère cartésien : \vec{i} et \vec{j}
- Coordonnées cartésiennes du point mobile : $x(t)$ et $y(t)$



Vecteur position de M: $\vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

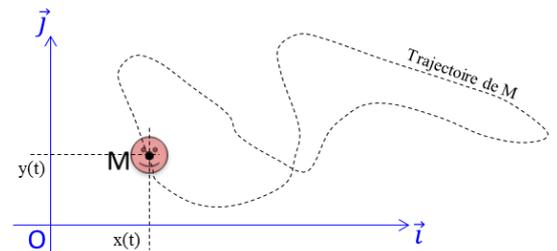
Vitesse moyenne entre t_1 et t_2 : $V_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} = \frac{1}{\Delta t}(\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}) = \frac{1}{\Delta t}(\vec{M}_1\vec{M}_2)$

Vitesse instantanée de M : $\vec{V}_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{M}(t)\vec{M}(t+\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} \right) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j}$

Accélération instantanée de M : $\vec{a}_M = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j}$

1.1.3 - Cinématique à 2 dimensions : Mouvement quelconque

- Origine O du repère cartésien
- Vecteurs unitaires du repère cartésien : \vec{i} et \vec{j}
- Coordonnées cartésiennes du point mobile : $x(t)$ et $y(t)$



Vecteur position de M: $\vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

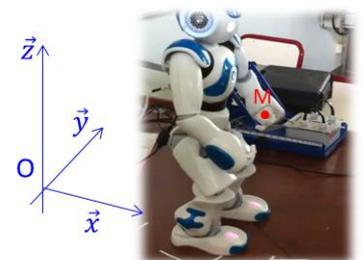
Vitesse moyenne entre t_1 et t_2 : $V_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$

Vitesse instantanée de M : $\vec{V}_M = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

Accélération instantanée de M : $\vec{a}_M = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}_M}{dt}$

1.1.4 - Cinématique à 3 dimensions : Mouvement quelconque

- Origine O du repère cartésien
- Vecteurs unitaires du repère cartésien : \vec{x} , \vec{y} et \vec{z}
- Coordonnées cartésiennes du point mobile : $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$



Vecteur position de M: $\vec{OM} = a(t)\vec{x} + b(t)\vec{y} + c(t)\vec{z}$

Vitesse instantanée de M : $\vec{V}_M = \frac{da(t)}{dt}\vec{x} + \frac{db(t)}{dt}\vec{y} + \frac{dc(t)}{dt}\vec{z} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

Accélération instantanée de M: $\vec{a}_M = \vec{\Gamma}_M = \frac{d^2a(t)}{dt^2}\vec{x} + \frac{d^2b(t)}{dt^2}\vec{y} + \frac{d^2c(t)}{dt^2}\vec{z} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}_M}{dt}$

Illustration : véhicule Segway

L'énergie maximale stockée dans les batteries vaut $E_b = 2 \text{ MJ} = 2.10^6 \text{ J}$ et les moto-réducteurs ont un rendement global de $\eta = 0,8$: ainsi l'énergie totale fournie par les deux moto-réducteurs est égale à $\eta.E_b$.

La résistance moyenne à l'avancement du véhicule peut être assimilée à un effort de 60 N.

En notant d la distance parcourue par le SEGWAY[®], l'énergie due à l'effort résistant est $W_{\text{résistant}} = -60.d$.

Le théorème de l'énergie cinétique sous forme intégrale donne l'équation suivante en régime établi (vitesse de déplacement constante du SEGWAY[®]) : $W_{\text{moteur-1}} + W_{\text{moteur-2}} + W_{\text{résistant}} = 0$.

Q1 - Déterminer la distance maximale que peut parcourir le SEGWAY[®] entre deux recharges des batteries. Le cahier des charges est-il validé ?

Chaque moteur peut délivrer « un travail moyen » identique et égal à $W_{\text{moteur-1}} = W_{\text{moteur-2}} = \eta.E_b / 2 = 0,8 \text{ MJ}$.

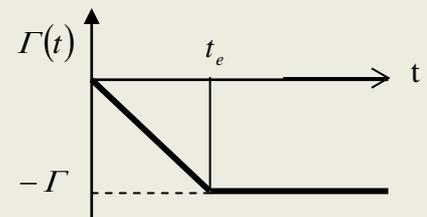
Comme le travail résistant vaut $W_{\text{résistant}} = -60.d$, on en déduit que $d = \frac{\eta.E_b}{60} \cong 26,6 \text{ km}$. CDCF OK

Le schéma d'organisation structurelle comporte des codeurs incrémentaux, fournissant au calculateur une image de la vitesse de rotation des moteurs.

Q2 - Donner le nom d'un capteur permettant d'acquérir une vitesse de rotation. Expliquer son principe de fonctionnement.

On peut utiliser une génératrice tachymétrique. C'est un moteur électrique à courant continu « monté à l'envers » qui fournit une tension quasi proportionnelle à sa vitesse angulaire.

On se place dans une phase de décélération en ligne droite dont le modèle est défini sur la figure ci-contre :

**Notations :**

- (O, \vec{x}, \vec{y}) repère lié à la route avec \vec{x} axe horizontal donnant la direction de la route
- $x(t)$ position du centre de gravité du véhicule par rapport à la route

À l'instant $t=0$, le véhicule est à l'origine du repère : $x(t=0) = 0$. La vitesse du véhicule à l'instant t sera notée $v(t)$. à $t=0$ pour lequel $v(0) = v_0$ constante, le véhicule initie une manœuvre de freinage jusqu'à l'arrêt, le

Le véhicule a besoin pour mobiliser sa décélération maximale Γ ($\Gamma > 0$) d'un temps : $t_e = \frac{-v_0}{\Gamma}$

avec Γ pente de la courbe de décélération de $t=0$ à $t=t_e$. Au-delà de ce temps, la décélération est constante et l'évolution temporelle du profil d'accélération du véhicule est illustrée sur la figure ci-dessus.

On suppose que le véhicule reste dans la phase où la décélération dépend linéairement du temps.

Q3 – Donner l'expression de temps d'arrêt du véhicule noté t_a . l'expression fera intervenir $v(0)$ et Γ .

$$\Gamma(t) = \Gamma t \text{ par intégration on obtient } v(t) = \frac{\Gamma t^2}{2} + v(0) \text{ avec } v(0) = \frac{20}{3,6} = 5,55 \text{ m/s}$$

$$\text{Le temps d'arrêt est atteint lorsque } v(t) = 0 \Rightarrow t_a = \sqrt{-2 \frac{v(0)}{\Gamma}}$$

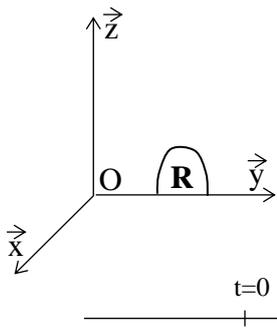
Q4 – Déterminer la valeur de Γ pour que la distance d'arrêt donnée dans le cahier des charges soit respectée. Que vaut alors le temps d'arrêt ?

$$\text{On intègre une nouvelle fois : } x(t) = \frac{\Gamma t^3}{6} + v(0)t + x(0) \text{ avec } x(0) = 0$$

$$\text{ce qui donne : } x(t_a) = 3 \text{ m} = -\frac{\Gamma t_a^3}{6} + v(0)t_a \text{ d'où : } \Gamma = -\frac{6 v(0)^3}{9 (x(t_a))^2} = -16,9 \text{ ms}^{-3}$$

$$t_a = \sqrt{-2 \frac{v(0)}{\Gamma}} = 0,8 \text{ s}$$

1.2 – Référentiel: composé d'un repère d'espace + un repère de temps



* repère d'espace R composé d'une origine O et d'une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

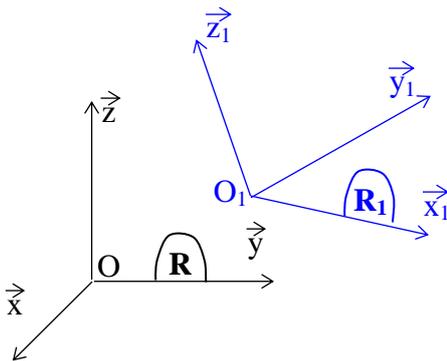
$$R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

l'unité de longueur utilisée est le mètre

* repère de temps (supposé absolu et uniforme)

l'unité de temps est la seconde.

1.3 – Changement de référentiel: on se limite au changement du repère d'espace



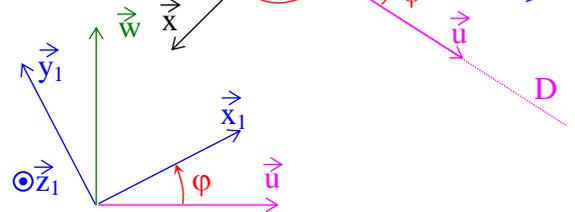
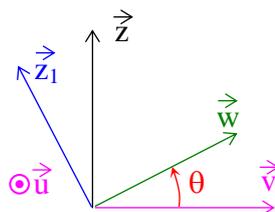
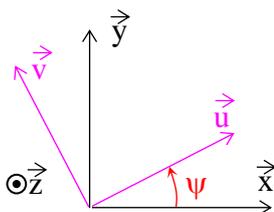
Il faut définir la position de R_1 par rapport à R:

*paramétrage de la position de O_1 : on donne les coordonnées de O_1 dans le repère R (coordonnées cartésiennes x, y, z ou cylindriques r, θ, z par exemple)

* paramétrage de l'orientation de R_1 par rapport à R définie par trois angles, par exemple les angles d'Euler :

on place les deux repères au même point A et on appelle droite des nœuds D, l'intersection des plans (A, \vec{x}, \vec{y}) et $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$. Soit \vec{u} un vecteur unitaire de D. On passe de R à R_1 par les trois rotations successives:

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow[\text{autour de } \vec{z}]{\psi} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) \xrightarrow[\text{autour de } \vec{u}]{\theta} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1) \xrightarrow[\text{autour de } \vec{z}_1]{\phi} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

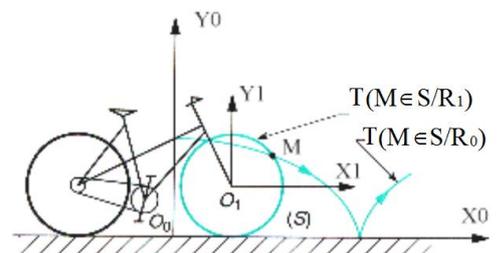


1.4 – Point mobile par rapport à un repère:

Le point M est défini par ses coordonnées (cartésiennes par ex): $M \begin{matrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{matrix}$ ou $\vec{OM} = a(t) \vec{x} + b(t) \vec{y} + c(t) \vec{z}$

1.4.1 – Trajectoire du point M par rapport au repère R:

La trajectoire de M par rapport à un repère R est le lieu des points coïncidents M_i dans R avec : $M_i(t) \equiv M$ à t , $M_i \in R$. Avec R : repère d'observation. La trajectoire d'un même point dépend du repère d'observation choisi.



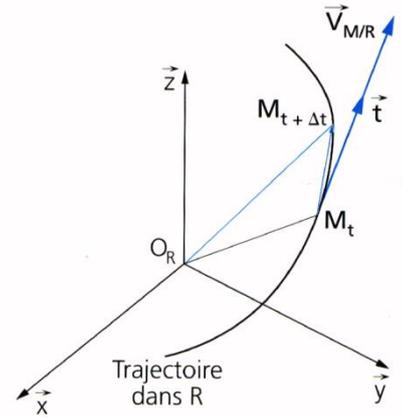
1.4.2 – Vitesse du point M par rapport au repère R: unité: m/s

$$\vec{V}(M/R) = \left[\frac{d\vec{OM}}{dt} \right]_R = \frac{d\vec{OM}}{dt/R}$$

le point O doit être l'origine ou point fixe du repère R

par exemple $\vec{V}(M/R_i) = \left[\frac{d\vec{O_iM}}{dt} \right]_{R_i}$

Propriété graphique : en tout point, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire



1.4.3 – Accélération du point M par rapport au repère R: unité: m/s²

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right]_R$$

Soit encore : $\vec{\Gamma}(M/R) = \left[\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right]_R$

Propriété : le vecteur accélération se décompose en accélération normale et accélération tangentielle.

2 – Dérivation vectorielle:

2.1 – Dérivée d'un vecteur mobile par rapport à un repère R: R = (O, x̄, ȳ, z̄)

Soit le vecteur \vec{U} exprimé dans R de coordonnées $\begin{matrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{matrix}$ ou $\vec{U}(t) = a(t)\bar{x} + b(t)\bar{y} + c(t)\bar{z}$

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R = \frac{da}{dt}\bar{x} + \frac{db}{dt}\bar{y} + \frac{dc}{dt}\bar{z} = \dot{a}\bar{x} + \dot{b}\bar{y} + \dot{c}\bar{z} \quad (\text{Il suffit de dériver les coordonnées du vecteur par rapport au temps})$$

✍ Application de la formule sur l'exemple de l'éolienne (dernière page) : déterminer les vecteurs suivants :

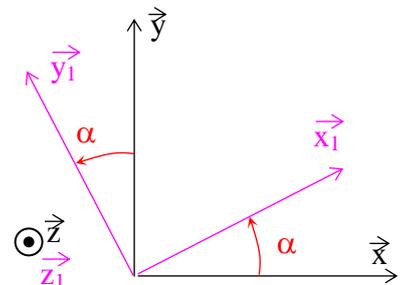
$$\vec{V}(A/R_0), \vec{\Gamma}(A/R_0), \vec{V}(B/R_1), \vec{V}(A/R_1), \vec{V}(B/R_0)$$

2.2 – Dérivées d'un vecteur mobile par rapport à deux repères R et R₁:

Définition: dans le cas du changement de base ci-contre, on appelle **vecteur rotation de R₁ par rapport à R** le vecteur

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\alpha}\bar{z} = \omega\bar{z}$$

Ce vecteur est dirigé suivant l'axe de rotation commun à R et R₁. Sa norme est la vitesse angulaire instantanée de R₁ par rapport à R en rad/s



Dérivation vectorielle : $\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}(t)$ (1)

✍ Démontrer cette formule de dérivation vectorielle dans le cas de la figure ci-dessus pour un vecteur \vec{U} quelconque.

Si la position de R_1 par rapport à R est paramétrée par les angles d'Euler, $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z}_1$ et la formule (1) se généralise sans problème par applications de la formule de dérivation vectorielle.

✍ Application de la formule sur l'exemple de l'éolienne : déterminer les vecteurs suivants en utilisant la dérivation vectorielle :

$$\vec{V}(A/R_0), \vec{\Gamma}(A/R_0), \vec{V}(B/R_0)$$

3 – Cinématique du solide:

3.1 – Définition:

En cinématique, on fait l'hypothèse de solides indéformables:

$$\forall A \text{ et } B \in \text{solide } S \text{ indéformable} \Rightarrow d(A,B) = \text{Cste}$$

On peut alors lier un repère R à ce solide S et la position d'un point quelconque du solide est fixe dans le repère R . Par suite, on confond en général S et R .

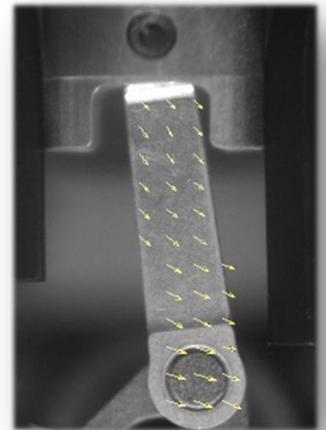
3.2 – Champ des vecteurs vitesses d'un solide:

Champ de vecteur vitesse: $\forall M \in S$, on peut définir de manière unique la vitesse du point M par rapport à un repère R_0 notée $\vec{V}(M \in S/R_0)$

Remarque1: le point M n'appartient pas forcément physiquement à S

Exemples :

- Centre de gravité d'un tube
- Champs des vecteurs vitesse ci-contre : mouvement complexe d'une bielle dans un moteur à thermique



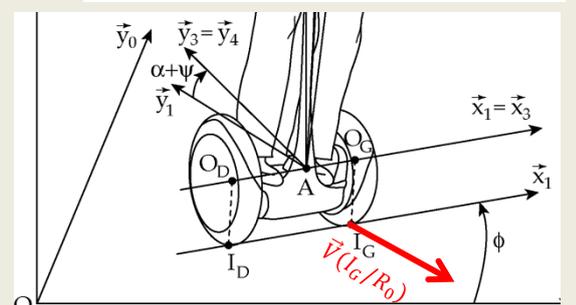
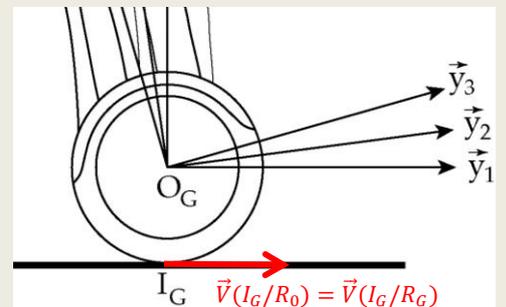
Remarque2: un même point peut être affecté à plusieurs solides et donc avoir des vitesses différentes.

Illustration : véhicule Segway

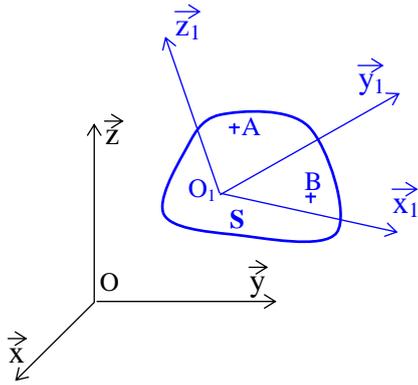
Le véhicule se déplace suivant y_1^+ .

$$\vec{V}(I_G \in R_G/R_0) = \vec{0} \text{ (Roulement sans glissement de la roue sur le sol)}$$

mais $\vec{V}(I_G/R_0) \neq \vec{0}$ et $\vec{V}(I_G/R_G) \neq \vec{0}$. Le point de contact est à la fois mobile par rapport au sol et par rapport à la roue.



Cherchons la relation entre les vitesses de deux points A et B d'un même solide S par rapport à un repère R:



soit R_1 un repère lié au solide S.

✍ Démontrer la relation suivante (formule de Varignon) :

$$\vec{V}(B \in R_1/R) = \vec{V}(A \in R_1/R) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overline{AB} \quad (2)$$

Attention: $\vec{V}(O \in R_1/R) = \vec{V}(O \in S/R) \neq \vec{0}$. Il s'agit d'une vitesse dite d'entraînement. Elle n'est pas mesurable comme peut l'être $\vec{V}(A \in R_1/R)$ en plaçant un capteur de vitesse sur le repère d'observation R.

✍ Sur l'exemple de l'échelle (dernière page), déterminer analytiquement $\vec{V}(A \in E/R)$, $\vec{V}(B \in E/R)$ et $\vec{V}(O \in E/R)$.

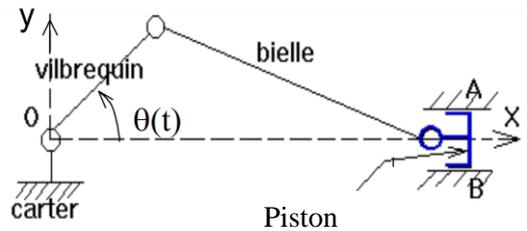
Mouvements particuliers ou élémentaires :

* Solide en translation rectiligne par rapport au repère R

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \forall A \text{ et } B \in S, \vec{V}(A \in S/R) = \vec{V}(B \in S/R)$$

exemple : piston d'un système bielle – manivelle.

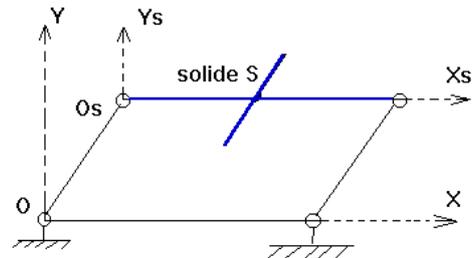


* Solide en translation curviligne par rapport au repère R

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \forall A \text{ et } B \in S, \vec{V}(A \in S/R) = \vec{V}(B \in S/R)$$

exemples : grande roue ou parallélogramme déformable.



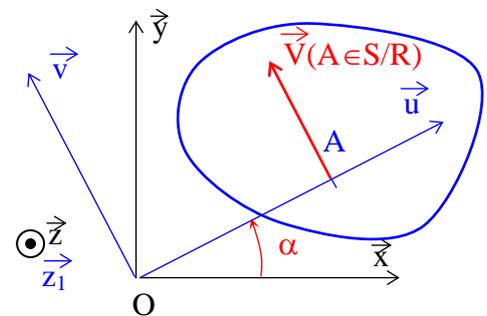
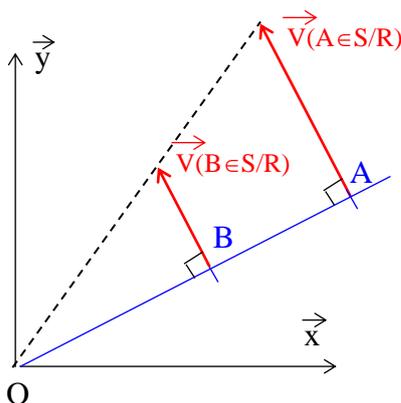
* Solide en rotation autour d'un axe fixe de R, par exemple (O, \vec{z})

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R) = \omega \vec{z} = \dot{\alpha} \vec{z}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(A \in S/R) = \vec{V}(O \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{OA}$$

$$= \vec{0} + \omega \vec{z} \wedge r \vec{u}$$

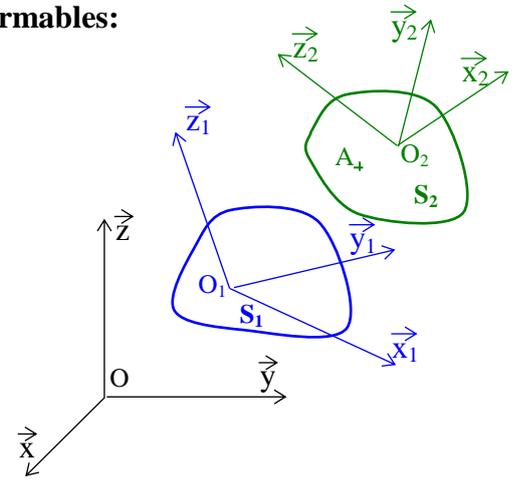
$$= \omega r \vec{v}$$



Graphiquement : la vitesse est perpendiculaire au rayon et proportionnelle au rayon. Le champ des vecteurs vitesse est dit ortho-radial et proportionnel au rayon.

3.3 – Composition de mouvements de solides indéformables:

Soient 2 solides S_1 (repère R_1) et S_2 (repère R_2) en mouvement l'un par rapport à l'autre et en mouvement par rapport au repère R .



3.3.1 – Composition des vecteurs vitesses:

Quelle relation existe-t-il entre $\vec{V}(A \in R_2/R_1)$ et $\vec{V}(A \in R_2/R)$?

Démontrer la relation suivante :

$$\vec{V}(A \in R_2/R) = \vec{V}(A \in R_2/R_1) + \vec{V}(A \in R_1/R) \quad (3)$$

Si le repère R est fixe, $\vec{V}(A \in R_2/R)$ est appelée vitesse absolue, $\vec{V}(A \in R_2/R_1)$ vitesse relative et $\vec{V}(A \in R_1/R)$ vitesse d'entraînement. Vitesses absolue et relative sont mesurables en plaçant un capteur sur le repère d'observation. La vitesse d'entraînement est la vitesse instantanée d'un **point supposé fixe** à l'instant t dans le repère auquel on l'affecte alors qu'il ne l'est pas dans le réalité... Cette vitesse n'est pas mesurable.

Généralisation: $\vec{V}(A \in R_n/R_0) = \vec{V}(A \in R_n/R_{n-1}) + \vec{V}(A \in R_{n-1}/R_{n-2}) + \dots + \vec{V}(A \in R_1/R_0)$

3.3.2 – Composition des vecteurs rotation:

Quelle relation existe-t-il entre $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$, $\vec{\Omega}(R_1/R)$ et $\vec{\Omega}(R_2/R)$?

Démontrer la relation suivante :

$$\vec{\Omega}(R_2/R) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R) \quad (4)$$

Généralisation: $\vec{\Omega}(R_n/R_0) = \vec{\Omega}(R_n/R_{n-1}) + \vec{\Omega}(R_{n-1}/R_{n-2}) + \dots + \vec{\Omega}(R_1/R_0)$

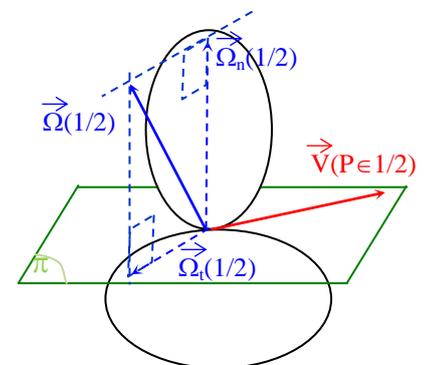
Si la position de R_1 est définie par rapport à R à l'aide des angles d'Euler, on a: $\vec{\Omega}(R_1/R) = \psi \vec{z} + \theta \vec{u} + \phi \vec{z}_1$

3.4 – Mouvement relatif de deux solides en contact ponctuel:

Soient deux solides **1** et **2** en contact ponctuel en P .

Définitions: $\vec{V}(P \in 1/2)$ est appelée **vitesse de glissement** de **1** par rapport à **2**.

Ce vecteur est situé dans le plan tangent commun (π) en P à **1** et **2**.



$\vec{\Omega}(1/2) = \vec{\Omega}_n(1/2) + \vec{\Omega}_t(1/2)$ avec $\vec{\Omega}_n(1/2) =$ vecteur rotation de pivotement normal au plan π

et $\vec{\Omega}_t(1/2) =$ vecteur rotation de roulement contenu dans le plan π

Si $\vec{V}(P \in 1/2) = \vec{0}$ on dit que **1 roule et pivote sans glisser sur 2.**

4 – Torseur cinématique:

D'après la relation (2), le champ des vecteurs vitesses d'un solide indéformable est le champ de moments du vecteur rotation. Le champ des vitesses d'un solide S par rapport à un repère R peut donc être représenté par un torseur, appelé **torseur cinématique de S par rapport à R** appelé aussi **torseur distributeur des vitesses** :

$$\mathcal{V}(S/R) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{array} \right\}$$

La connaissance de ce torseur cinématique permet de définir complètement le mouvement d'un solide (S) ou de son repère associé par rapport à un autre solide ou repère associé (R).

Les relations (3) et (4) permettent d'écrire la relation de composition des torseurs cinématiques:

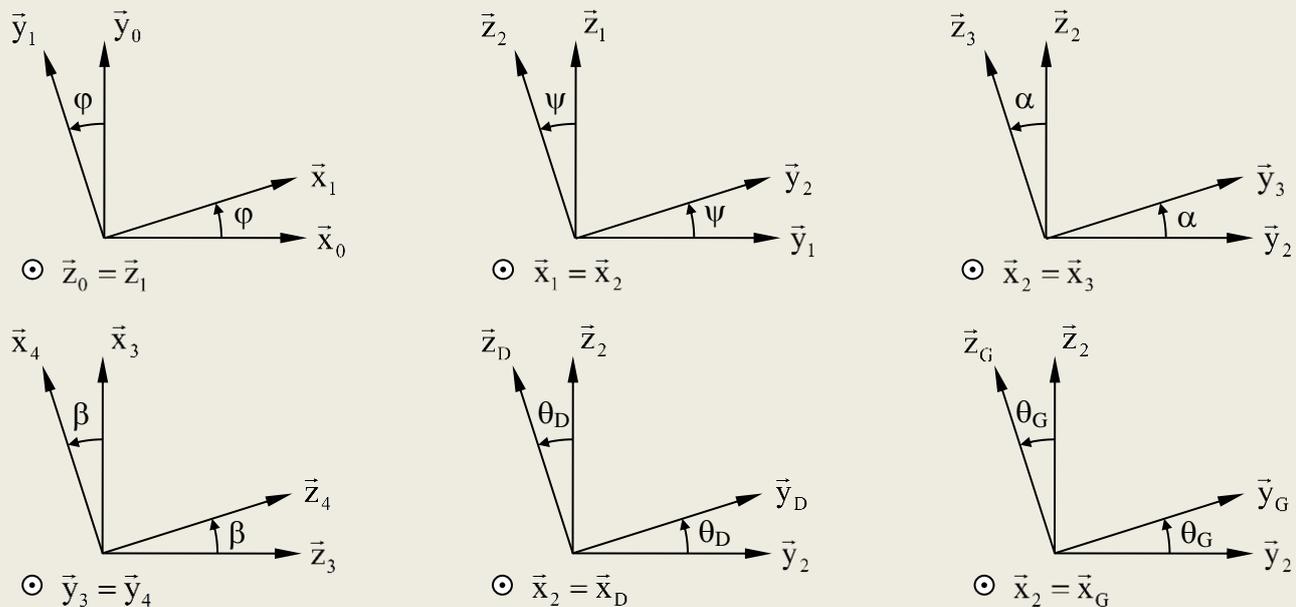
$$\mathcal{V}(R_2/R) = \mathcal{V}(R_2/R_1) + \mathcal{V}(R_1/R)$$

Attention: les éléments de réduction des torseurs doivent être exprimés au même point!

Illustration : véhicule Segway

Étude cinématique préalable

Q5 - Réaliser les figures géométrales (ou figures de calcul) représentant les angles φ , ψ , α , β , θ_D et θ_G .



Q6 - Exprimer, en fonction du paramétrage, les torseurs cinématiques :

- du châssis **2** par rapport au sol **0** $\{V(2/0)\}$ au point A en notant $\vec{V}(A \in 2/0) = U \cdot \vec{x}_1 + V \cdot \vec{y}_1$
- de la roue droite **R_D** par rapport au châssis **2** $\{V(R_D/2)\}$ en un point à choisir intelligemment
- de la roue gauche **R_G** par rapport au châssis **2** $\{V(R_G/2)\}$ en un point à choisir intelligemment

$$\left\{ \mathcal{V}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2/0) \\ \vec{V}(A, 2/0) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \cdot \vec{x}_1 + \dot{\phi} \cdot \vec{z}_0 \\ U \cdot \vec{x}_1 + V \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_A \quad \left\{ \mathcal{V}(R_G/2) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(R_G/2) \\ \vec{V}(O_G, R_G/2) \end{array} \right\}_{O_G} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_G \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_G}$$

$$\left\{ \mathcal{V}(R_D/2) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(R_D/2) \\ \vec{V}(O_D, R_D/2) \end{array} \right\}_{O_D} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_D \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_D}$$

Q7 - Énoncer ensuite, sous forme vectorielle la plus simple, les deux relations de roulement sans glissement des roues droite R_D et gauche R_G par rapport à la route O aux niveaux des points I_D et I_G .

On a $\vec{V}(I_D, R_D / 0) = \vec{0}$ pour le roulement sans glissement en I_D et $\vec{V}(I_G, R_G / 0) = \vec{0}$ pour celui en I_G .

Q8 - Après développement des conditions écrites en Q7, déterminer les trois relations scalaires liant les six paramètres cinématiques inconnus $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}_D$, $\dot{\theta}_G$, U et V aux dimensions L et R .

Ces relations seront utilisées pour les calculs de dynamique des parties suivantes et permettront notamment de définir les expressions des composantes de vitesse U et V en fonction des mouvements étudiés.

Pour la roue droite $\vec{V}(I_D, R_D / 0) = \vec{V}(I_D, R_D / 2) + \vec{V}(I_D, 2 / 0) = \vec{0}$ par la composition des mouvements.

On en déduit que $\vec{0} + \dot{\theta}_D \cdot \vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{O_D I_D} + U \cdot \vec{x}_1 + V \cdot \vec{y}_1 + (\dot{\psi} \cdot \vec{x}_1 + \dot{\phi} \cdot \vec{z}_0) \wedge \overrightarrow{A I_D} = \vec{0}$

En projection sur les directions \vec{x}_1 et \vec{y}_1 , on trouve $U = 0$ et $R \cdot (\dot{\theta}_D + \dot{\psi}) - \frac{L}{2} \cdot \dot{\phi} + V = 0$

Pour la roue gauche $\vec{V}(I_G, R_G / 0) = \vec{V}(I_G, R_G / 2) + \vec{V}(I_G, 2 / 0) = \vec{0}$ par la composition des mouvements.

En projection sur les directions \vec{x}_1 et \vec{y}_1 , on trouve $U = 0$ et $R \cdot (\dot{\theta}_G + \dot{\psi}) + \frac{L}{2} \cdot \dot{\phi} + V = 0$.

(aucun calcul n'est nécessaire : on remplace θ_D par θ_G et L par $-L$).

Validation de l'exigence : Permettre au conducteur de se déplacer aisément sur la route

Détermination de l'inclinaison du conducteur en ligne droite

Objectif : déterminer la relation entre l'inclinaison du conducteur et l'accélération du SEGWAY® en ligne droite ainsi que les équations mécaniques nécessaires au modèle d'asservissement d'inclinaison.

Hypothèses :

- le SEGWAY® se déplace maintenant en ligne droite : $\varphi = 0$ et $\beta = 0$ (valeur maintenue à zéro par le conducteur) : on note donc pour simplifier $\theta_D = \theta_G = \theta$.
- l'angle α d'inclinaison du conducteur est supposé **constant** pendant la phase d'étude : dans ce cas, on peut montrer qu'on a $\vec{V}(A \in 2 / 0) = V \cdot \vec{y}_1 = -R \cdot (\dot{\psi} + \dot{\theta}) \cdot \vec{y}_1$.

Détermination des équations mécaniques régissant le système

Dans cette partie, le problème est supposé plan dans $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Pour pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique, il est nécessaire de calculer différents termes faisant intervenir la cinématique du véhicule.

On définit la résultante dynamique d'un solide $\overrightarrow{\mathcal{R}}_D(S_i / 0) = m_i \cdot \vec{\Gamma}(G_i \in S_i / 0)$ où G_i est le centre de gravité du solide S_i de masse m_i et $\vec{\Gamma}$ l'accélération (normalement notée \vec{a}).

Q9 - Déterminer pour chaque solide (Conducteur H ou 4 , Châssis S ou 2 , Roue Gauche R_G et Roue Droite R_D), dans leur mouvement par rapport au repère Galiléen R_0 , la résultante dynamique projetée sur la direction \vec{y}_1 notée, pour un solide S_i , $\overrightarrow{\mathcal{R}}_D(S_i / 0) \cdot \vec{y}_1$ dans les hypothèses d'étude de cette partie. Les résultats seront donnés en fonction des caractéristiques de masse et les paramètres V , α et ψ (et/ou de leurs dérivées successives) puis les paramètres de θ , α et ψ (et/ou de leurs dérivées successives).

On rappelle que $V = -R.(\dot{\psi} + \dot{\theta})$ soit $\dot{V} = -R.(\ddot{\psi} + \ddot{\theta})$.

▪ Conducteur **H** : $m_H \vec{a}(G,4/0) \cdot \vec{y}_1 = m_H [\dot{V} - h.\ddot{\psi} \cos(\alpha + \psi) + h.\dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \psi)]$

car $\vec{V}(G,4/0) = \vec{V}(G,2/0) = \vec{V}(A,2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{AG} = V.\vec{y}_1 - h.\dot{\psi}.\vec{y}_3$

$\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = \cos(\alpha + \psi)$ et l'angle α étant constant, $\frac{d}{dt} [\cos(\alpha + \psi)] = -\dot{\psi} \sin(\alpha + \psi)$

$m_H \vec{a}(G,4/0) \cdot \vec{y}_1 = m_H [-R.(\ddot{\psi} + \ddot{\theta}) - h.\ddot{\psi} \cos(\alpha + \psi) + h.\dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \psi)]$ en remplaçant \dot{V} par $-R.(\ddot{\psi} + \ddot{\theta})$ dans l'expression ci-dessus.

- Châssis **S** : $m_S \vec{a}(A,2/0) \cdot \vec{y}_1 = m_S \dot{V} = -m_S R.(\ddot{\psi} + \ddot{\theta})$
- Roue droite **R_D** : $m_R \vec{a}(O_D, R_D/0) \cdot \vec{y}_1 = m_R \dot{V} = -m_R R.(\ddot{\psi} + \ddot{\theta})$
- Roue gauche **R_G** : $m_R \vec{a}(O_G, R_G/0) \cdot \vec{y}_1 = m_R \dot{V} = -m_R R.(\ddot{\psi} + \ddot{\theta})$

Q10 - Déterminer l'expression du scalaire $[\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\Gamma}(G \in H/0)] \cdot \vec{x}_1$

On a $[\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}(G, H/0)] \cdot \vec{x}_1 = [h.\vec{z}_3 \wedge (\dot{V}.\vec{y}_1 - h.\ddot{\psi}.\vec{y}_3 - h.\dot{\psi}^2.\vec{z}_3)] \cdot \vec{x}_1 = h.\dot{V} \underbrace{(\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_1}_{-\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3} + h^2.\ddot{\psi}.\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_1$

On en déduit que $[\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}(G, H/0)] \cdot \vec{x}_1 = -h.\dot{V} \cos(\alpha + \psi) + h^2.\ddot{\psi}$ car $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = \cos(\alpha + \psi)$ et $\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_1 = 1$

Toutes ces grandeurs servent à calculer les termes du torseur dynamique, qui sera vu en 2^e année MP/PSI.

La démarche de calcul, présentée ici à titre d'information, est la suivante :

- pour la première équation, notée (1) dans la suite, on isole l'ensemble {châssis + conducteur} et on applique le théorème du moment dynamique en A en projection sur la direction \vec{x}_1
- pour la seconde équation, notée (2) dans la suite, on travaille en trois temps :
 - on isole l'une des deux roues (elles ont un comportement parfaitement symétrique, inutile de faire le calcul deux fois) et on applique le théorème du moment dynamique en A en projection sur la direction \vec{x}_1 , ce qui permet d'obtenir une relation entre l'effort au contact avec le sol, le couple du moteur, les paramètres cinétiques et les paramètres de mouvement
 - on isole l'ensemble complet {châssis + conducteur + roue gauche + roue droite} et on applique le théorème de la résultante dynamique en projections sur la direction \vec{y}_1 , ce qui permet d'obtenir une relation entre l'effort au contact avec le sol, les paramètres cinétiques et les paramètres de mouvement
 - en exprimant l'effort au contact dans les deux équations et en égalisant les expressions obtenues, on trouve la deuxième équation de mouvement

Les deux équations obtenues par la démarche présentée précédemment sont les suivantes :

$$\begin{cases} (1) & (m_H.h^2 + A_H + A_S).\ddot{\psi} - m_H.h.\dot{V} \cos(\alpha + \psi) = m_H.h.g \sin(\alpha + \psi) - 2.C_S \\ (2) & (m_S + m_H + 2.m_R).\dot{V} - m_H.h.\ddot{\psi} \cos(\alpha + \psi) + m_H.h.\dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \psi) = -2.\frac{A_R}{R^2}.\dot{V} - 2.\frac{C_S}{R} \end{cases}$$

où A_H, A_S, A_R sont des constantes cinétiques associées aux chariot, au conducteur et aux roues
 C_S est le couple (action mécanique) exercé par chaque moteur sur les roues.

Q11 - Énoncer les hypothèses qui permettent d'envisager de linéariser le système précédent.

On suppose qu'on se trouve au voisinage de la position verticale (soit $\alpha + \psi$ très petit) : dans ce cas, on a les approximations très classiques $\sin(\alpha + \psi) \cong \alpha + \psi$ et $\cos(\alpha + \psi) \cong 1$. De plus, toujours dans cette hypothèse, on peut négliger les termes $\dot{\psi}^2$ devant les termes $\ddot{\psi}$, soit $\dot{\psi}^2 \ll \ddot{\psi}$ (hypothèse classique de linéarisation qui se démontre facilement dans le cas de petits mouvements au voisinage de la position verticale).

Sous ces hypothèses, le système linéarisé peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} (1) & A.\ddot{\psi} - B.\dot{V} = -2.C_s + C.(\alpha + \psi) \\ (2) & -B\ddot{\psi} + D.\dot{V} = -2.\frac{C_s}{R} \end{cases}$$

Q12 - Donner les expressions des constantes A, B, C et D en fonction des grandeurs des équations complètes (1) et (2).

On en déduit : $A = A_H + A_S + m_H.h^2$, $B = m_H.h$, $C = m_H.h.g$ et $D = m_H + m_S + 2.m_R + 2.\frac{A_R}{R^2}$

On prendra dans la suite, sans les justifier, les valeurs numériques suivantes :

$A = 91 \text{ kg.m}^2$ $B = 76 \text{ kg.m}$ $C = 745,5 \text{ N.m}$ $D = 124,7 \text{ kg.}$

Relation entre l'inclinaison du conducteur et l'accélération du SEGWAY®

On souhaite trouver la relation entre l'inclinaison $\alpha(t)$ du conducteur et l'accélération du SEGWAY®.

L'asservissement est ici considéré comme parfaitement réalisé, c'est à dire $\psi = 0$, $\dot{\psi} = 0$ et $\ddot{\psi} = 0$

Q13 - Montrer que cette relation s'écrit $\dot{V}(t) = K.\alpha(t)$ où vous préciserez la valeur numérique du gain K.

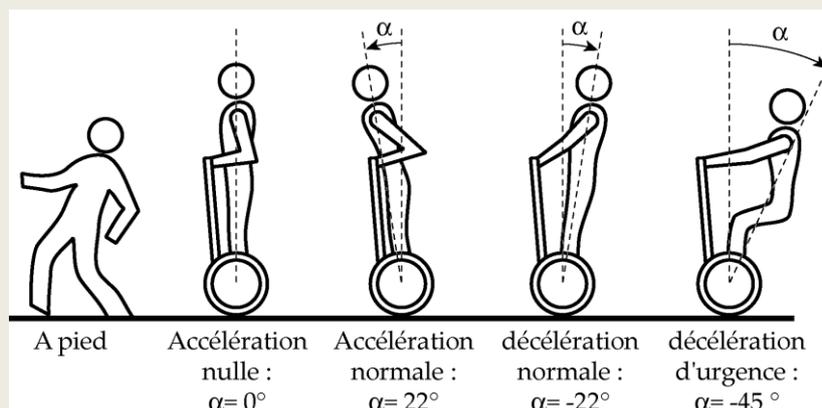
L'asservissement est considéré comme parfaitement réalisé donc ψ est considéré comme nul (et c'est bien entendu le cas de ses dérivées successives par rapport au temps).

En combinant les deux équations précédentes on détermine la relation suivante :

$$\begin{cases} (1) & -B.\dot{V} = -2.C_s + C.(\alpha + \psi) \\ (2) & D.\dot{V} = -2.\frac{C_s}{R} \end{cases} \quad \text{soit} \quad -\left(\frac{B}{R} + D\right).\dot{V} = \frac{C}{R}.\alpha \quad \text{et donc} \quad \dot{V} = -\frac{C}{B + D.R}.\alpha$$

Avec les valeurs numériques fournies, on en déduit que $K \cong -7 \text{ m.s}^{-2}.\text{rad}^{-1}$ (valeur rassurante car fournie à la question suivante : c'était aussi le cas dans le sujet original !).

Q14 - Vérifier les performances attendues du cahier des charges à partir des configurations proposées ci-dessous. On utilisera $K = 7 \text{ m.s}^{-2}/\text{rad}$ et on rappelle que V est négatif en marche avant.



Configurations angulaires proposées

Si $\alpha = 0$ alors $\dot{V} = 0$, ce qui signifie que la vitesse est constante : en position verticale, le SEGWAY® se déplace à vitesse constante, ce qui correspond aux attentes du conducteur.

Si $\alpha = 22^\circ$ alors l'accélération est de $\dot{V} \cong -2,68 \text{ m.s}^{-2}$: cette valeur est supérieure, en valeur absolue, aux $1,5 \text{ m.s}^{-2}$ demandé par le cahier des charges qui est donc vérifié pour la performance en accélération.

Pour l'inclinaison maximale de 45° (arrêt d'urgence), on a une décélération de $|\dot{V}| \cong 7 \times \frac{\pi}{4} \cong 5,5 \text{ m.s}^{-2}$, soit un

temps pour passer de 20 à 0 km.h^{-1} de $t_a = \frac{V}{\gamma} \cong 1 \text{ s}$: on en déduit que la distance parcourue pendant cette

phase est $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2 \cong 2,75 \text{ m} < 3 \text{ m}$: la distance maximale parcourue vérifie le cahier des charges.

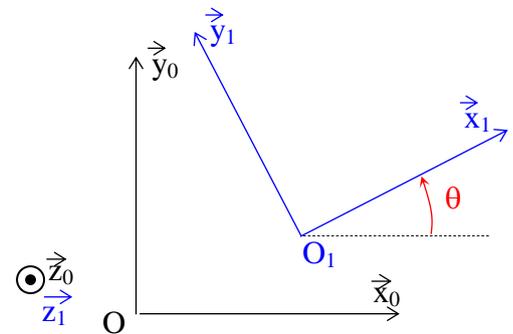
Au final, l'ensemble des performances attendues, et définies par le cahier des charges, est validé.

5 – Mouvement plan sur plan:

5.1 - Définition:

Soient deux repères $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ attachés à deux solides S_0 et S_1 . Si, au cours du mouvement de S_0/S_1 , un plan P lié à S_0 reste constamment confondu avec un plan P_1 lié à S_1 , le mouvement de S_0 par rapport à S_1 est dit plan (ou plan sur plan).

L'orientation de R_1 par rapport à R_0 est définie par le seul angle θ .



5.2 – Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses d'un solide:

Démontrer la propriété suivante :

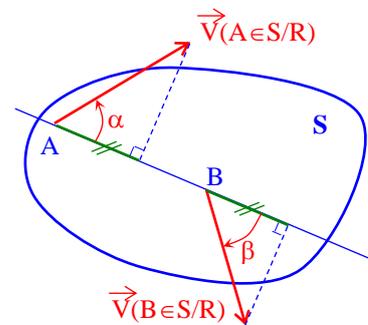
$$\vec{V}(B \in S/R) \cdot \overline{AB} = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \overline{AB}$$

$$\|\vec{V}(B \in S/R)\| \cdot \|\overline{AB}\| \cdot \cos \beta = \|\vec{V}(A \in S/R)\| \cdot \|\overline{AB}\| \cdot \cos \alpha$$

\Rightarrow les projections des vitesses de A et de B sur AB sont égales.

Attention: A et B doivent appartenir ou être supposés fixes dans le même solide et les projections sont orientées.

Donc, connaissant la vitesse d'un point A d'un solide et la direction de la vitesse d'un point B de ce même solide, on peut déterminer graphiquement l'intensité de la vitesse du point B.



☞ Représenter $\vec{V}(A \in E/R)$ à l'échelle $2 \text{ cm pour } 1 \text{ m/s}$. Déterminer graphiquement $\vec{V}(B \in E/R)$ et $\vec{V}(O \in E/R)$, avec $\alpha = 30^\circ$, $l = 2 \text{ m}$, $\dot{\alpha} = 1,5 \text{ rad/s}$.

5.3 - Centre instantané de rotation:

On montre qu'il existe un point I, appelé **centre instantané de rotation (CIR)** tel que $\vec{V}(I \in S_1/S) = \vec{0}$.

$$\forall M \in S_1, \quad \vec{V}(M \in S_1/S) = \vec{V}(I \in S_1/S) + \vec{\Omega}(S_1/S) \wedge \overline{IM} = \vec{0} + \dot{\theta} \vec{z} \wedge \overline{IM}$$

- donc $\vec{V}(M \in S_1/S)$ est perpendiculaire à $IM \Rightarrow I$ se trouve sur la perpendiculaire à $\vec{V}(M \in S_1/S)$ (« vitesse perpendiculaire au rayon »)

de plus $\forall M, N \in S_1 : \|\vec{V}(M \in S_1/S)\| = \|\vec{\Omega}(S_1/S)\| \cdot \|\vec{IM}\|$ et $\|\vec{V}(N \in S_1/S)\| = \|\vec{\Omega}(S_1/S)\| \cdot \|\vec{IN}\|$

- donc $\|\vec{V}(M \in S_1/S)\| = \|\vec{V}(N \in S_1/S)\| \cdot \frac{\|\vec{IM}\|}{\|\vec{IN}\|}$ (« vitesse proportionnelle au rayon »)

✍ Déterminer la position du CIR de E/R sur l'exercice de l'échelle.

Remarque: Connaissant le CIR de S_1/S , on peut trouver la direction de la vitesse de n'importe quel point de S_1 dans son mouvement par rapport à S .

✍ Déterminer la vitesse du centre de gravité G de l'échelle.

5.4 – Théorème des trois plans glissants:

Considérons trois solides S_1, S_2 et S_3 en mouvement plan les uns par rapport aux autres.

Soient $\vec{\Omega}(S_i/S_j) = \omega_{ij} \vec{x}$ et $I_{ij} = \text{CIR}$ du mouvement de S_i/S_j .

✍ Démontrer la propriété suivante :

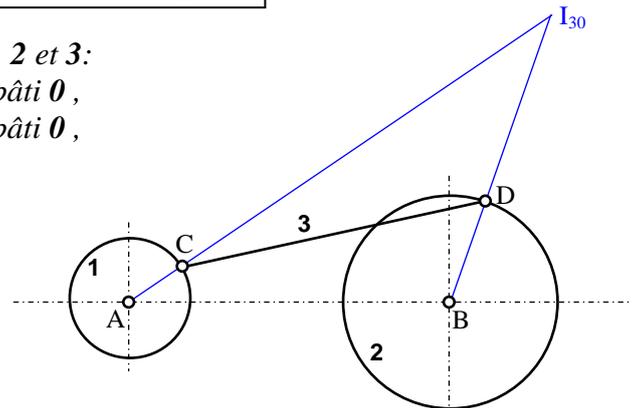
les 3 CIR I_{12}, I_{13} et I_{23} sont alignés.

Exemple : Soit le mécanisme plan constitué des trois solides 1, 2 et 3:

1 est en rotation autour de l'axe (A, \vec{x}) par rapport au bâti 0,

2 est en rotation autour de l'axe (B, \vec{x}) par rapport au bâti 0,

3 est articulé en C sur 1 et en D sur 2.



Déterminons le CIR du mouvement de 3/0 :

$$I_{10} = A \text{ et } I_{13} = C \Rightarrow I_{30} \text{ est sur } AC$$

$$I_{20} = B \text{ et } I_{23} = D \Rightarrow I_{30} \text{ est sur } BD \quad \text{donc } I_{30} \text{ est à l'intersection de } AC \text{ et } BD$$

5.5 - Base et roulante:

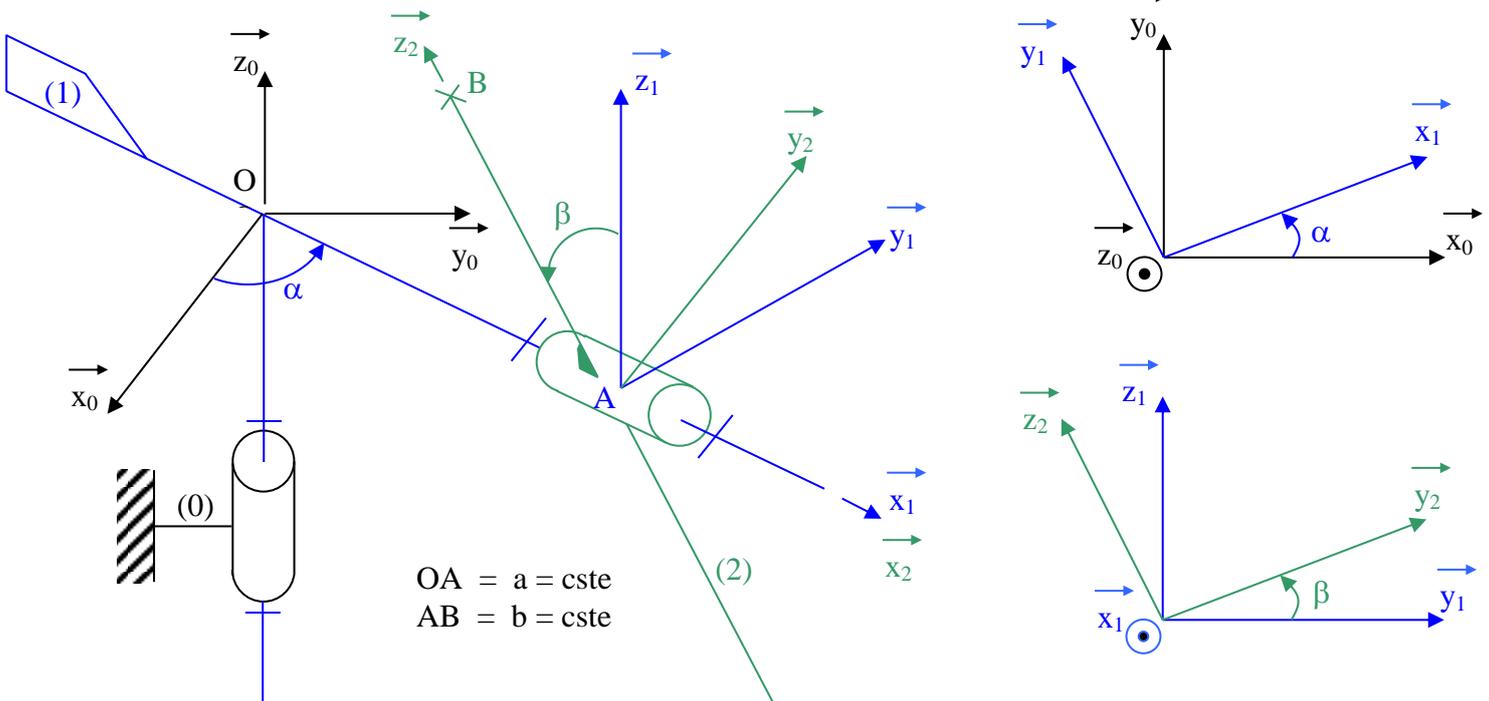
La base est le lieu du CIR dans le plan P. La roulante est le lieu du CIR dans le plan P_1 .

✍ Déterminer la base et la roulante du mouvement de E/R sur l'exercice de l'échelle.

Remarque: la base et la roulante sont deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

Exercices d'application

Éolienne : schéma cinématique



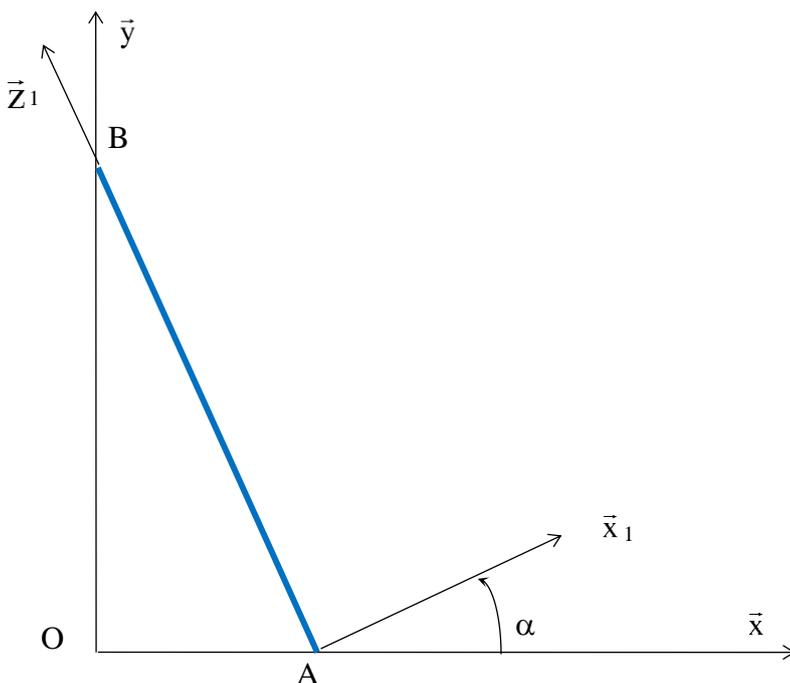
Paramétrage : on lie un repère à chaque solide

$R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ au bâti 0

$R_1(A, x_1, y_1, z_1)$ au solide 1

$R_2(A, x_2, y_2, z_2)$ au solide 2 (hélice)

Échelle glissant le long d'un mur :



Une échelle E , de longueur l , glisse en A sur le sol et en B sur un mur.

Le repère $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, lié au sol et au mur, est fixe.

Le repère $R_1(A, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z})$ est lié à l'échelle avec $\alpha = (\bar{x}, \bar{x}_1)$.

Pour les A.N. : $\alpha = 30^\circ, l = 2 \text{ m}, \dot{\alpha} = 1,5 \text{ rad/s}$