MPSI

Programme de colle - semaine 11 du 09/12/2024 au 15/12/2024

1 Relations binaires

- Relation d'équivalence. Classe d'équivalence (aucun exercice fait).
- Congruence (dans $\mathbb{Z}$) : compatibilité avec les opérations (*). Exemples d'utilisation.
- **Ce qui suit concerne l'ordre usuel dans** $\mathbb{R}$. Les techniques habituelles sont à connaître (utilisation des variations, factorisation, tableau de signe).
- Propriétés élémentaires des inégalités : compatibilité avec les opérations, transitivité, etc.
  On mettra l'accent sur la rigueur dans les raisonnements sur les inégalités : il est indispensable de se demander à chaque étape ce qu'on fait et pourquoi on a le droit de le faire.
- Valeur absolue. Propriétés (produit, inverse, etc).
  Interprétation en terme de distance. Encadrement : $|x| \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a$.
  Inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
- Partie (fonction) majorée, minorée, bornée. Majorant, minorant.
  A est bornée $\quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall x \in A,\, |x| \leqslant M$.
- Plus grand élément d'une partie, maximum d'une fonction, borne supérieure. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (admis).
  De même avec min, inf.
- Sur les max/sup : rester raisonnable (exemple : dire si tel ensemble (simple) admet ou pas un plus grand élément / une borne supérieure et justifier, éventuellement avec un schéma à l'appui).
- Partie entière d'un réel, division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

2 Suites réelles

Nous avons vu la définition d'une limite. Seuls les points marqués d'un (*) peuvent faite l'objet d'une démonstration en question de cours.
Pour les exercices, rester simple. Commencer par tester les compétences de terminale (recherche de limite en utilisant les opérations, faire un encadrement simple,...)

- Généralités : suite (réelle) majorée, bornée, etc.
- Définition d'une suite convergente (avec ε).
  Unicité de la limite (*), toute suite convergente est bornée (*). Si une suite u converge vers un réel $\ell > 0$, alors à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.
- Limite infinie.
- Opérations sur les limites :
  - Somme (*)
  - Produit (* uniquement le cas $(u_n v_n)$ avec (u_n) bornée et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).
  - Inverse.
- Théorème d'encadrement : n'a pas encore été vu en cours, mais connu depuis la terminale.
- **Pas encore vu, ne pas interroger sur ce qui suit :**
  - Théorème de la limite monotone, suites adjacentes.
  - Suite récurrentes non linéaires.
  - Suite extraite. Nous avons juste vu sans écrire la démonstration que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

  - Limite de suite complexe.

3 Exercices faits

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{4n+3} \equiv 2[5]$.

2. Inégalités à montrer :

   a) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$.

   b) $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ |e^x - 1| \leqslant |x|$

3. Dire si les ensembles suivants sont majorés, minorés, admettent un sup, un max, etc.

   i) $A = \left\{ \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

   ii) $B = \left\{ 1 + \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^{*+} \right\}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier (par encadrement) la convergence de la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

   a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

      On pourra encadrer la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $[k, k+1]$ *entre deux constantes et intégrer, dessin bienvenu.*

   b) En déduire par sommation un encadrement de (S_n).

   c) Donner un équivalent de (S_n).