MPSI

**Programme de colle - semaine 12 du 16/12/2024 au 22/12/2024**
**Le dernier de l'année !**

# 1 Suites réelles

- Exercices sur le programme précédent.
- Théorème d'encadrement (*)
- Théorème de la limite monotone (*, cas où la suite est majorée), suites adjacentes (*, bien distinguer la définition et le théorème).
- Suite extraite (définition). Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de $(u_n)$ tend aussi vers $\ell$.
  Si $u_{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
  Théorème de Bolzano-Weierstrass (aucun exercice fait, démonstration non exigible).
- Aucun résultat vu sur les suites récurrentes, les exercices doivent être guidés.

# 2 Loi de composition interne, groupe

- Définition d'une loi de composition interne (lci) sur un ensemble $E$.
  On s'appuiera surtout sur les exemples de lci déjà connues. Ne pas abuser des lois artificielles.
- Associativité, commutativité, élément neutre, élément inversible, partie stable par une lci, distributivité d'une lci par rapport à une autre.
- Structure de groupe : définition, groupe abélien (commutatif), itérées (puissances) d'un élément.
- Sous-groupe. $G$ et $\{e\}$ sont des sous-groupes.
- Exemples de groupes à connaître : groupes additifs $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
  Groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
  Groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ (ensemble des bijections de $E$ dans $E$).
  $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- **Pas encore vu :** intersection de sous-groupes, morphisme de groupes, a fortiori image, noyau.
- **Démonstration à savoir** : $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.

# 3 Exercices faits

1. **La série harmonique**, deuxième méthode
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = S_n - \ln n$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$.
      Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
      *On utilisera à deux reprises l'inégalité classique* $\forall x \in ]-1, +\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x$.
   b) Donner un équivalent de $(S_n)$.

2. **La série harmonique alternée.** *Peut être scindé, le a) et le b) sont indépendants.*
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   a) i) Montrer que $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.
      ii) Montrer que $(S_n)$ converge. Soit $\ell$ sa limite.
   b) i) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
      Par un encadrement, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

ii) En écrivant $S_n$ sous forme intégrale, déterminer $\ell$.

*On partira de* $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

3. Exercice du type :
   - Montrer que ... est un sous-groupe de ...
   - ... est-il un sous-groupe de ... ?