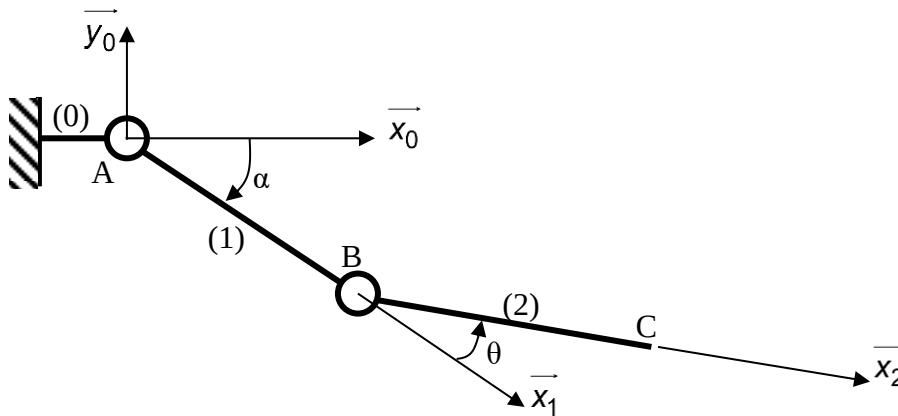


Exercice : Bras articulé à axes parallèles

Soit un système représenté par le schéma cinématique ci-dessous :



(1) est en liaison pivot par rapport au bâti (0) ; on a donc une rotation entre (0) et (1) d'axe $(A, \vec{z}_0)$ et d'angle $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$

(2) est en liaison pivot par rapport au bras (1) ; on a donc une rotation entre (1) et (2) d'axe $(B, \vec{z}_0)$ et d'angle $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

On donne : $AB = a$ et $BC = b$

$R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0)

$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ lié au bras (1)

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ lié au bras (2)

- Déterminer les vecteurs vitesses suivants : $\vec{V}(B/R_0)$, $\vec{V}(B/R_1)$, $\vec{V}(C/R_1)$, $\vec{V}(C/R_0)$
- Déterminer le vecteur accélération : $\vec{\Gamma}(C/R_0)$

Corrigé

Changements de bases :

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & \xrightarrow{\alpha} z_1 & \xrightarrow{\theta} z_2 \end{array} \quad \text{ce qui donne} \quad \begin{array}{cc} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \\ z_0 & \xrightarrow{\alpha+\theta} z_2 \end{array}$$

1)

$$\vec{V}(B/R_0) = \frac{d}{dt_{/0}} \overrightarrow{AB} = \frac{d}{dt_{/0}} (a \vec{x}_1) = a \frac{d}{dt_{/0}} \vec{x}_1 = a \left(\frac{d}{dt_{/1}} \vec{x}_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 \right) = a \dot{\alpha} \vec{z}_{01} \wedge \vec{x}_1 = a \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\vec{V}(B/R_1) = \frac{d}{dt_{/1}} (a \vec{x}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(C/R_1) = \frac{d}{dt_{/1}} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{d}{dt_{/1}} (\overrightarrow{BC}) = b \frac{d}{dt_{/1}} \vec{x}_2 = b (\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{x}_2) = b \dot{\theta} \vec{z}_{12} \wedge \vec{x}_2 = b \dot{\theta} \vec{y}_2$$

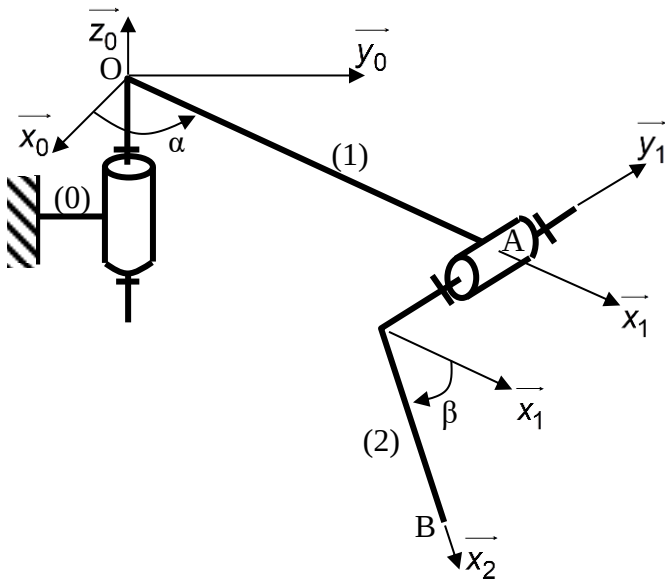
$$\vec{V}(C/R_0) = \frac{d}{dt_{/0}} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \frac{d}{dt_{/1}} (\overrightarrow{BC}) + (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{BC}) = a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b \dot{\theta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \vec{z}_{012} \wedge b \vec{x}_2 = a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{y}_2$$

2)

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(C/R_0) &= \frac{d}{dt_{/0}} (\vec{V}(C/R_0)) = a \ddot{\alpha} \vec{y}_1 + b(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) \vec{y}_2 + a \dot{\alpha} \frac{d}{dt_{/0}} \vec{y}_1 + b(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \frac{d}{dt_{/0}} \vec{y}_2 \\ &= a \ddot{\alpha} \vec{y}_1 + b(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) \vec{y}_2 + a \dot{\alpha} (\dot{\alpha} \vec{z}_{01} \wedge \vec{y}_1) + b(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) ((\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{z}_{012} \wedge \vec{y}_2) \\ &= a \ddot{\alpha} \vec{y}_1 + b(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) \vec{y}_2 - a \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1 - b(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \vec{x}_2 \end{aligned}$$

Exercice : Bras articulé à axes orthogonaux

Soit un système représenté par le schéma cinématique ci-dessous :



(1) est en liaison pivot par rapport au bâti (0) ; on a donc une rotation entre (0) et (1) d'axe $(O, \vec{z}_0)$ et d'angle $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$

(2) est en liaison pivot par rapport au bras (1) ; on a donc une rotation entre (1) et (2) d'axe $(A, \vec{y}_1)$ et d'angle $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

On donne : $OA = a$ et $\vec{AB} = -b\vec{y}_1 + c\vec{x}_2$

Les repères sont :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0)

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au bras (1)

$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié au bras (2)

- Déterminer les vecteurs vitesses suivants : $\vec{V}(A/R_0)$, $\vec{V}(A/R_1)$, $\vec{V}(B/R_1)$, $\vec{V}(B/R_0)$
- Déterminer le vecteur accélération : $\vec{\Gamma}(B/R_0)$

Corrigé

Changements de bases :

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & \xrightarrow{\alpha} z_1 & \xrightarrow{\beta} z_2 \end{array}$$

1)

$$\vec{V}(A/R_0) = \frac{d}{dt}_{/0} \vec{OA} = \frac{d}{dt}_{/0} (a\vec{x}_1) = a \frac{d}{dt}_{/0} \vec{x}_1 = a \left(\frac{d}{dt}_{/1} \vec{x}_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 \right) = a \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 = a \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\vec{V}(A/R_1) = \frac{d}{dt}_{/1} (a\vec{x}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(B/R_1) = \frac{d}{dt}_{/1} (\vec{OA} + \vec{AB}) = \frac{d}{dt}_{/1} (\vec{AB}) = \frac{d}{dt}_{/1} (-b\vec{y}_1 + c\vec{x}_2) = \vec{0} + c(\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{x}_2) = c\dot{\beta} \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_2 = -c\dot{\beta} \vec{z}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(B/R_0) &= \frac{d}{dt}_{/0} (\vec{OB}) = \frac{d}{dt}_{/1} (\vec{OB}) + (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OB}) = \vec{V}(B/R_1) + (\dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge (a\vec{x}_1 - b\vec{y}_1 + c\vec{x}_2)) \\ &= -c\dot{\beta} \vec{z}_2 + a\dot{\alpha} \vec{y}_1 + b\dot{\alpha} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge c(\cos \beta \vec{x}_1 - \sin \beta \vec{z}_1) = -c\dot{\beta} \vec{z}_2 + b\dot{\alpha} \vec{x}_1 + (a\dot{\alpha} + c\dot{\alpha} \cos \beta) \vec{y}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{\Gamma}(B/R_0) = \frac{d}{dt}_{/0} \vec{V}(B/R_0) = -c\ddot{\beta} \vec{z}_2 + b\ddot{\alpha} \vec{x}_1 + (a\ddot{\alpha} + c\ddot{\alpha} \cos \beta - c\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta) \vec{y}_1$$

2)

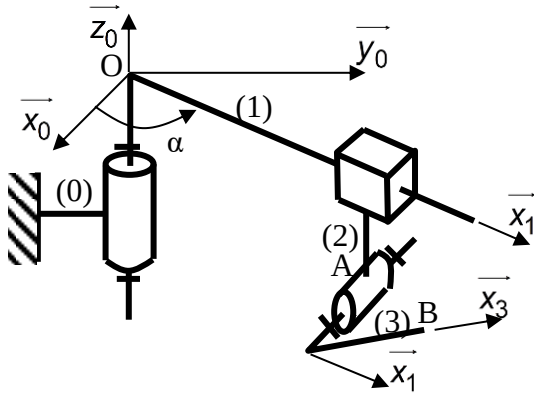
$$-c\dot{\beta} \frac{d}{dt}_{/0} \vec{z}_2 + b\dot{\alpha} \frac{d}{dt}_{/0} \vec{x}_1 + (a\dot{\alpha} + c\dot{\alpha} \cos \beta) \frac{d}{dt}_{/0} \vec{y}_1 = -c\ddot{\beta} \vec{z}_2 + b\ddot{\alpha} \vec{x}_1 + (a\ddot{\alpha} + c\ddot{\alpha} \cos \beta - c\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta) \vec{y}_1 +$$

$$-c\dot{\beta}(\dot{\beta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha}(\cos \beta \vec{z}_2 - \sin \beta \vec{x}_2)) \wedge \vec{z}_2 + b\dot{\alpha}^2 \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 + (a + c \cos \beta) \dot{\alpha}^2 \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1$$

$$= -c\ddot{\beta} \vec{z}_2 + b\ddot{\alpha} \vec{x}_1 + (a\ddot{\alpha} + c\ddot{\alpha} \cos \beta - c\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta) \vec{y}_1 - c\dot{\beta}^2 \vec{x}_2 - c\dot{\beta}\dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 + b\dot{\alpha}^2 \vec{y}_1 - (a + c \cos \beta) \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1$$

Exercice : Bras articulé avec pendule glissant

Soit un système représenté par le schéma cinématique ci-dessous :



$$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

$$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

$$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

$$R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$$

(1) est en liaison pivot par rapport au bâti (0) ; on a donc une rotation entre (0) et (1) d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$

(2) est en liaison glissière par rapport au bras (1) ; on a donc une translation entre (1) et (2) avec $\vec{OA} = l(t) \cdot \vec{x}_1 - a \cdot \vec{z}_1$

(3) est en liaison pivot par rapport à (2) d'axe $(A, \vec{y}_1)$; on a donc une rotation entre (2) et (3) avec $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$

On donne : $\vec{AB} = -b \cdot \vec{y}_1 + r \cdot \vec{x}_3$

- Déterminer les vecteurs vitesses suivants : $\vec{V}(A/R_0)$, $\vec{V}(A/R_1)$, $\vec{V}(B/R_2)$, $\vec{V}(B/R_0)$
- Déterminer le vecteur accélération : $\vec{\Gamma}(B/R_0)$

Corrigé

Changements de bases :

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1=x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1=y_2 & \xrightarrow{\beta} y_3 \\ z_0 & \xrightarrow{\alpha} z_1=z_2 & z_3 \end{array}$$

1)

$$\begin{aligned} \vec{V}(A/R_0) &= \frac{d}{dt_{/0}} \vec{OA} = \frac{d}{dt_{/0}} (\ell(t) \vec{x}_1 - a \vec{z}_1) = \frac{d}{dt_{/1}} (\ell(t) \vec{x}_1 - a \vec{z}_1) + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (\ell(t) \vec{x}_1 - a \vec{z}_1) = \dot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}_{01} \wedge (\ell(t) \vec{x}_1 - a \vec{z}_1) \\ &= \dot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \ell(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{V}(A/R_1) = \frac{d}{dt_{/1}} (\ell(t) \vec{x}_1 - a \vec{z}_1) = \dot{\ell}(t) \vec{x}_1$$

$$\vec{V}(B/R_2) = \frac{d}{dt_{/2}} (\vec{AB}) = \frac{d}{dt_{/2}} (-b \vec{y}_1 + r \vec{x}_3) = \frac{d}{dt_{/2}} (-b \vec{y}_2 + r \vec{x}_3) = \vec{0} + r (\vec{\Omega}_{3/2} \wedge \vec{x}_3) = r \dot{\beta} \vec{y}_{23} \wedge \vec{x}_3 = -r \dot{\beta} \vec{z}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(B/R_0) &= \frac{d}{dt_{/0}} (\vec{OB}) = \frac{d}{dt_{/0}} (\vec{OA} + \vec{AB}) = \dot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \ell(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \frac{d}{dt_{/0}} (\vec{AB}) \\ &= \dot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \ell(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \frac{d}{dt_{/2}} (\vec{AB}) + (\vec{\Omega}_{2/0} \wedge (-b \vec{y}_1 + r \vec{x}_3)) = \dot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \ell(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 - r \dot{\beta} \vec{z}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}_{012} \wedge (-b \vec{y}_{12} + r \vec{x}_3) \\ &= \dot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \ell(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 - r \dot{\beta} \vec{z}_3 + b \dot{\alpha} \vec{x}_2 + r \dot{\alpha} \vec{z}_2 \wedge r \vec{x}_3 = \dot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \ell(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 - r \dot{\beta} \vec{z}_3 + b \dot{\alpha} \vec{x}_2 + r \dot{\alpha} \vec{z}_2 \wedge (\cos \beta \vec{x}_2 - \sin \beta \vec{z}_2) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \vec{V}(B/R_0) = \dot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \ell(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 - r \dot{\beta} \vec{z}_3 + b \dot{\alpha} \vec{x}_2 + r \dot{\alpha} \cos \beta \vec{y}_2$$

2)

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(B/R_0) &= \frac{d}{dt_{/0}} \vec{V}(B/R_0) = \ddot{\ell}(t) \vec{x}_1 + \dot{\ell}(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \ell(t) \ddot{\alpha} \vec{y}_1 - r \ddot{\beta} \vec{z}_3 + b \ddot{\alpha} \vec{x}_2 + r \ddot{\alpha} \cos \beta \vec{y}_2 - r \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \vec{y}_2 \\ &+ \dot{\ell}(t) \frac{d \vec{x}_1}{dt_{/0}} + \ell(t) \dot{\alpha} \frac{d \vec{y}_1}{dt_{/0}} - r \dot{\beta} \frac{d \vec{z}_3}{dt_{/0}} + b \dot{\alpha} \frac{d \vec{x}_2}{dt_{/0}} + r \dot{\alpha} \cos \beta \frac{d \vec{y}_2}{dt_{/0}}\end{aligned}$$

$$\frac{d \vec{x}_1}{dt_{/0}} = \dot{\alpha} \vec{z}_{01} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha} \vec{y}_1 = \frac{d \vec{x}_2}{dt_{/0}}$$

$$\frac{d \vec{y}_1}{dt_{/0}} = \dot{\alpha} \vec{z}_{01} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha} \vec{x}_1 = \frac{d \vec{y}_2}{dt_{/0}}$$

$$\begin{aligned}\frac{d \vec{z}_3}{dt_{/0}} &= \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{z}_3 = (\vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}) \wedge \vec{z}_3 = (\dot{\beta} \vec{y}_3 + \vec{0} + \dot{\alpha} \vec{z}_2) \wedge \vec{z}_3 = \dot{\beta} \vec{x}_3 + \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_3 - \sin \beta \vec{x}_3) \wedge \vec{z}_3 \\ &= \dot{\beta} \vec{x}_3 + \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où } \vec{\Gamma}(B/R_0) &= (\ddot{\ell}(t) - r \dot{\alpha}^2 \cos \beta + b \ddot{\alpha} - \ell(t) \dot{\alpha}^2) \vec{x}_1 + (2 \dot{\ell}(t) \dot{\alpha} \vec{y}_1 + \ell(t) \ddot{\alpha} + b \dot{\alpha}^2 + r \ddot{\alpha} \cos \beta - r \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) \vec{y}_1 \\ &- r \ddot{\beta} \vec{z}_3 - r \dot{\beta}^2 \vec{x}_3 - r \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \vec{y}_3 \quad \text{Ouf !!!}\end{aligned}$$

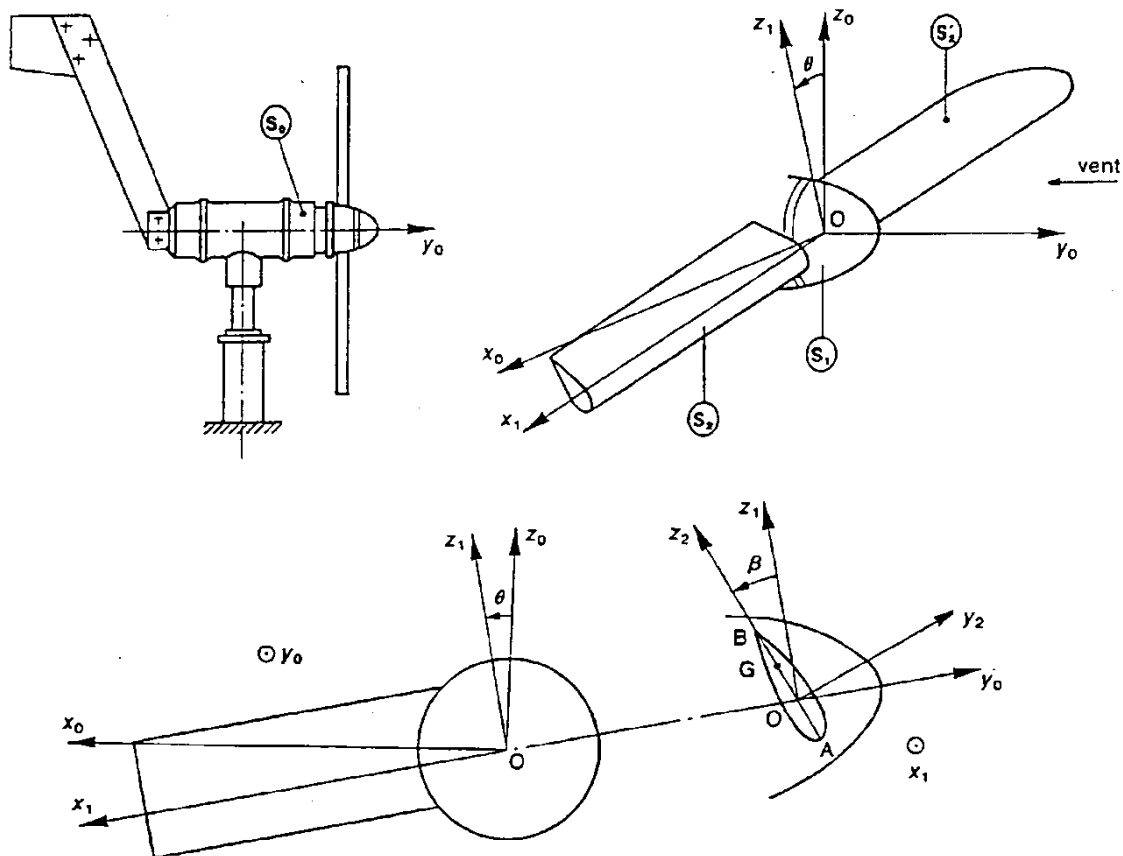
Exercice : aérogénérateur

La figure ci-dessous représente le corps (S_0) d'un aérogénérateur à hélice bipale muni d'un empennage qui lui permet de s'orienter dans la direction du vent.

Soit $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au corps (S_0). L'ensemble rotor (S_1) et alternateur électrique tourne dans le corps (S_0) autour de l'axe $(O, \vec{y}_0)$. Soit $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). On pose $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$, avec : $\theta = \omega t$ et $\omega = 120 \text{ rad/s}$

Par fort vent un dispositif de mise en drapeau permet aux pales de l'hélice de pivoter autour de l'axe $(O, \vec{x}_1)$. Soit $R_2(O; \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à la pale (S_2) tel que l'axe $(O, \vec{z}_2)$ soit dirigé suivant la droite de référence AB de la pale. On pose $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, en fonctionnement normal l'angle de calage $\beta = 20^\circ$.

Soit G le centre d'inertie de la pale (S_2), tel que : $\vec{OG} = a.\vec{x}_1 + c.\vec{z}_2$ avec $a = 160 \text{ mm}$ et $c = 13 \text{ mm}$.



Travail demandé :

1/ Donner l'expression littérale du vecteur vitesse $\vec{V}_{G/R_0}$, la vitesse du point G par rapport au repère R_0 . Donner la valeur numérique de sa norme.

2/ Donner l'expression littérale de $\vec{x}_0.\vec{\Gamma}_{G/R_0}$.

Corrigé

1/ Donner l'expression littérale du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{G/R_0}}$, la vitesse du point G par rapport au repère R_0 .
Donner la valeur numérique de sa norme.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{G/R_0}} &= \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} (a.\overrightarrow{x_1} + c.\overrightarrow{z_2}) \right]_{R_0} = a. \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{x_1} \right]_{R_0} + c. \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{z_2} \right]_{R_0} \\ \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{x_1} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{x_1} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \omega.\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{x_1} = -\omega.\overrightarrow{z_1} \\ \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{z_2} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{z_2} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} \wedge \overrightarrow{z_2} = \omega.\overrightarrow{y_0} \wedge \overrightarrow{z_2} = \omega.\cos \beta.\overrightarrow{x_1}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V_{G/R_0}} = -a.\omega.\overrightarrow{z_1} + c.\omega.\cos \beta.\overrightarrow{x_1}$$

Puisque $\overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{x_1}$ appartiennent à la même base, alors

$$\|\overrightarrow{V_{G/R_0}}\| = |\omega|.\sqrt{(a)^2 + (c.\cos \beta)^2} = 120.\sqrt{(160)^2 + (13.\cos 20^\circ)^2} = 19256 \text{ mm/s} = 19.256 \text{ m/s}$$

2/ Donner l'expression littérale de $\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}}$.

En utilisant la propriété : $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}) = \frac{d}{dt/R}(\overrightarrow{U}).\overrightarrow{V} - \overrightarrow{U}.\frac{d}{dt/R}(\overrightarrow{V})$ vraie pour tout vecteur $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ et tout repère R

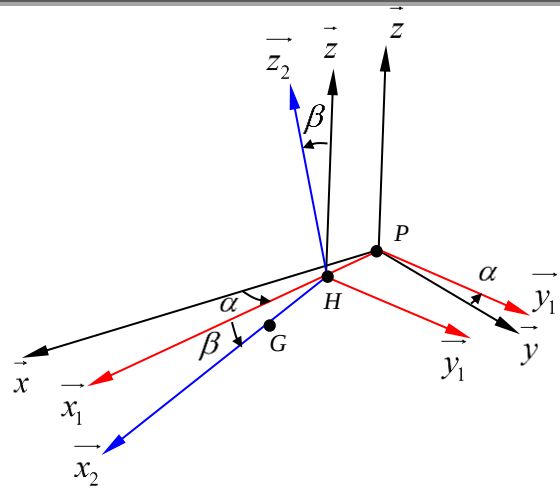
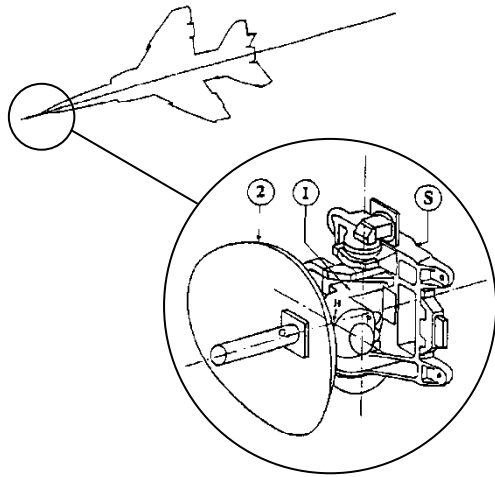
(démonstration en utilisant les coordonnées par exemple).

$$\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}} = \overrightarrow{x_0}.\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{G/R_0}} \right]_{R_0} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{V_{G/R_0}}) - \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{x_0} \right]_{R_0}.\overrightarrow{V_{G/R_0}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{V_{G/R_0}})$$

$$\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{(-a.\omega.\overrightarrow{z_1} + c.\omega.\cos \beta.\overrightarrow{x_1})}) = \frac{d}{dt}(-a.\omega.\sin \theta + c.\omega.\cos \beta.\cos \theta)$$

$$\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}} = \frac{d}{dt}(-a.\omega.\sin \theta + c.\omega.\cos \beta.\cos \theta) = -\omega^2(a.\cos \theta + c.\cos \beta.\sin \theta)$$

Exercice: radar



Le radar étudié est un radar monté dans un nez d'avion. (S) est fixée à la carlingue.

Le repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la terre. L'avion est en mouvement par rapport à la terre, tel que la trajectoire du point P (fixe par rapport à l'avion) décrit une droite et tel que $\vec{\Omega}_{R_{avion}/R_0} = \vec{0}$ si R_{avion} est lié à l'avion. On notera donc $R_{avion}(P, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ce repère-là, et on notera $\vec{V}_{P/R_0} = v(t) \cdot \vec{x}$.

La partie mobile du radar est schématisée par les solides (1) et (2). Son orientation par rapport au support de fixation (S), lié à l'avion, est repérée par les deux paramètres α et β définis ci-dessous :

- A la première sous-unité de rotation (1) est lié le repère $R_1(P, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. (1) est en liaison pivot autour de $(P, \vec{z})$, sa rotation est caractérisée par l'angle de gisement $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

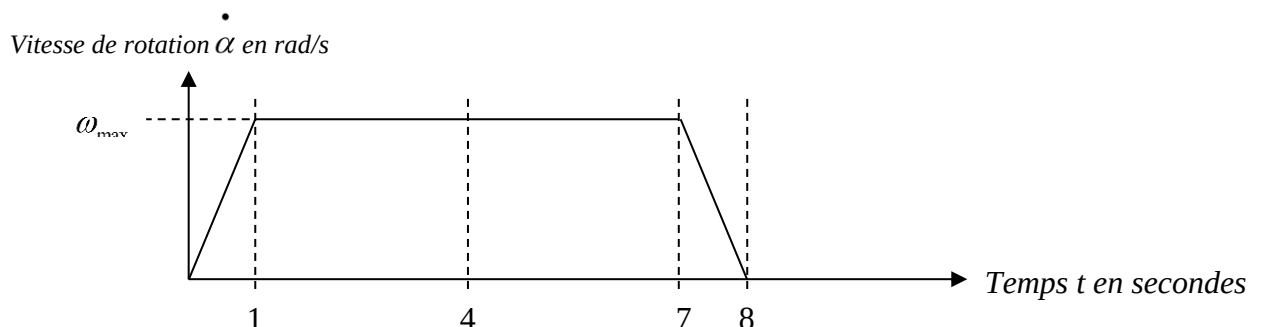
- La seconde sous-unité de rotation (2) (qui porte l'antenne) est en liaison pivot autour de $(H, \vec{y}_1)$ par rapport à (1) ($\vec{PH} = h\vec{x}_1$). Le repère $R_2(H, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lui est associé. Le mouvement de (2) par rapport à (1) est caractérisé par l'angle de site $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

On notera $\vec{PH} = h\vec{x}_1$ et $\vec{HG} = a\vec{x}_2$ (a et h constants).

- 1/ Tracer les deux figures planes relatives aux angles de rotation α et β .
- 2/ Exprimer les vecteurs rotations $\vec{\Omega}_{R_1/R_{avion}}$ et $\vec{\Omega}_{R_2/R_1}$ relatifs à chaque figure plane.
- 3/ Exprimer la vitesse $\vec{V}_{G/R_0}$, du point G par rapport au repère R_0 .
- 4/ Exprimer l'accélération selon $\vec{x}$, $\vec{x} \cdot \vec{\Gamma}_{G/R_0}$, du point G par rapport au repère R_0 .

Pour un angle de site β constant, on souhaite vérifier que le balayage du radar a une amplitude suffisante par rapport à une loi de commande sur l'angle de gisement α . Le balayage est estimé suffisant si l'angle α couvre intégralement la plage $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

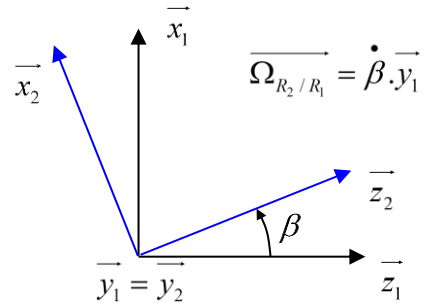
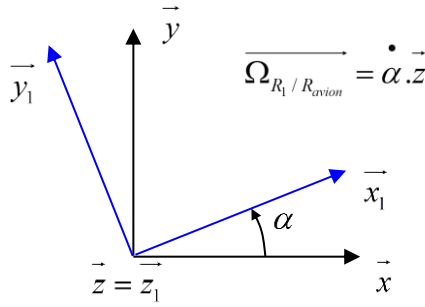
La loi imposée sur le moteur commandant ce mouvement (rotation autour de $(P, \vec{z})$) est la suivante :



- 5/ Calculer $\omega_{\max}$ pour que cette loi de commande soit compatible avec un balayage suffisant.

Corrigé

- 1/
- 2/



- 3/ $\overrightarrow{V_{G/R_0}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OP} \right]_{R_0} + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{PH} \right]_{R_0} + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{HG} \right]_{R_0}$

$$\overrightarrow{V_{G/R_0}} = v(t) \cdot \vec{x} + \left[\frac{d}{dt} h \cdot \vec{x}_1 \right]_{R_0} + \left[\frac{d}{dt} a \cdot \vec{x}_2 \right]_{R_0} = v(t) \cdot \vec{x} + h \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \vec{x}_1 + a \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0}} \wedge \vec{x}_2$$

$$\overrightarrow{V_{G/R_0}} = v(t) \cdot \vec{x} + h \cdot (\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_{avion}}} + \overrightarrow{\Omega_{R_{avion}/R_0}}) \wedge \vec{x}_1 + a \cdot (\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_{avion}}} + \overrightarrow{\Omega_{R_{avion}/R_0}}) \wedge \vec{x}_2$$

$$\overrightarrow{V_{G/R_0}} = v(t) \cdot \vec{x} + h \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1 + a \cdot (\dot{\alpha} \vec{z} + \dot{\beta} \vec{y}_1) \wedge \vec{x}_2 = v(t) \cdot \vec{x} + h \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1 + a \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \vec{y}_1 - a \cdot \dot{\beta} \vec{z}_2$$

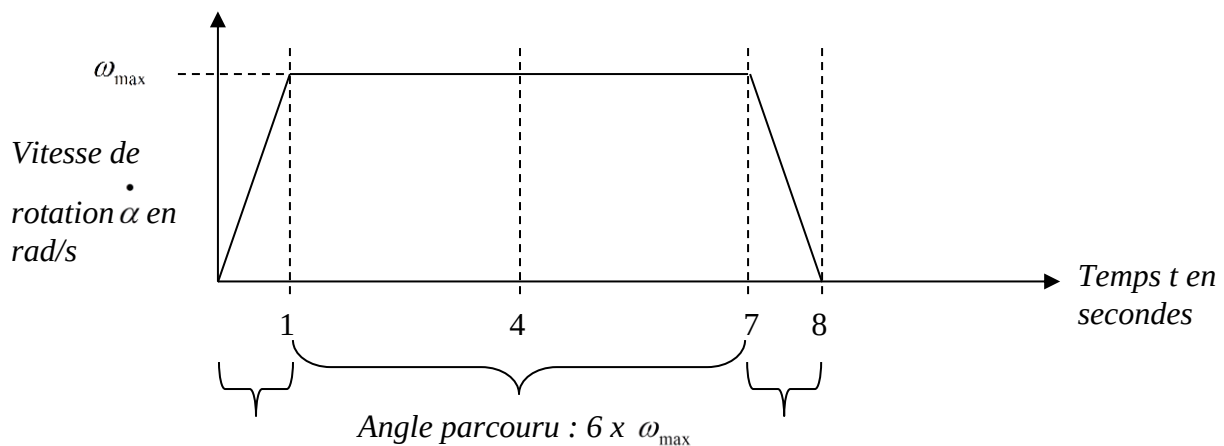
Donc $\overrightarrow{V_{G/R_0}} = v(t) \cdot \vec{x} + (h \cdot \dot{\alpha} + a \cdot \dot{\alpha} \cos \beta) \cdot \vec{y}_1 - a \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2$

- 4/ $\vec{x} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}} = \vec{x} \cdot \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{G/R_0}} \right]_{R_0} = \vec{x} \cdot \left[\frac{d}{dt} \left(v(t) \cdot \vec{x} + (h \cdot \dot{\alpha} + a \cdot \dot{\alpha} \cos \beta) \cdot \vec{y}_1 - a \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2 \right) \right]_{R_0}$

$$\vec{x} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}} = \vec{x} \cdot \left[\frac{d}{dt} \left(v(t) \cdot \vec{x} + (h \cdot \dot{\alpha} + a \cdot \dot{\alpha} \cos \beta) \cdot \vec{y}_1 - a \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_2 \right) \right]_{R_0}$$

$$\vec{x} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}} = \dot{v}(t) - \left(h \cdot \ddot{\alpha} + a \cdot \ddot{\alpha} \cos \beta - a \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \sin \beta \right) \cdot \sin \alpha - a \cdot \ddot{\beta} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta + \left(h \cdot \dot{\alpha} + a \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \right) \cdot \vec{x} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_{R_0} - a \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_2 \right]_{R_0}$$

$$\vec{x} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R_0}} = \dot{v}(t) - \left(h \cdot \ddot{\alpha} + a \cdot \ddot{\alpha} \cos \beta - a \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \sin \beta \right) \cdot \sin \alpha - a \cdot \ddot{\beta} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \left(h \cdot \dot{\alpha} + a \cdot \dot{\alpha} \cos \beta \right) - a \cdot \dot{\beta} \cdot \left(-\dot{\alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \dot{\beta} \sin \alpha \cdot \cos \beta \right)$$



Angle parcouru :

$$1/2 \times \omega_{\max}$$

Angle parcouru :

$$1/2 \times \omega_{\max}$$

- 5/ L'angle total parcouru au cours du cycle est de $\left(\frac{1}{2} + 6 + \frac{1}{2} \right) \cdot \omega_{\max} = 7 \cdot \omega_{\max}$. Cet angle doit couvrir

$$\frac{2\pi}{3} \text{ radians. Donc } \omega_{\max} \geq \frac{2\pi}{21} \text{ rad/s}$$