

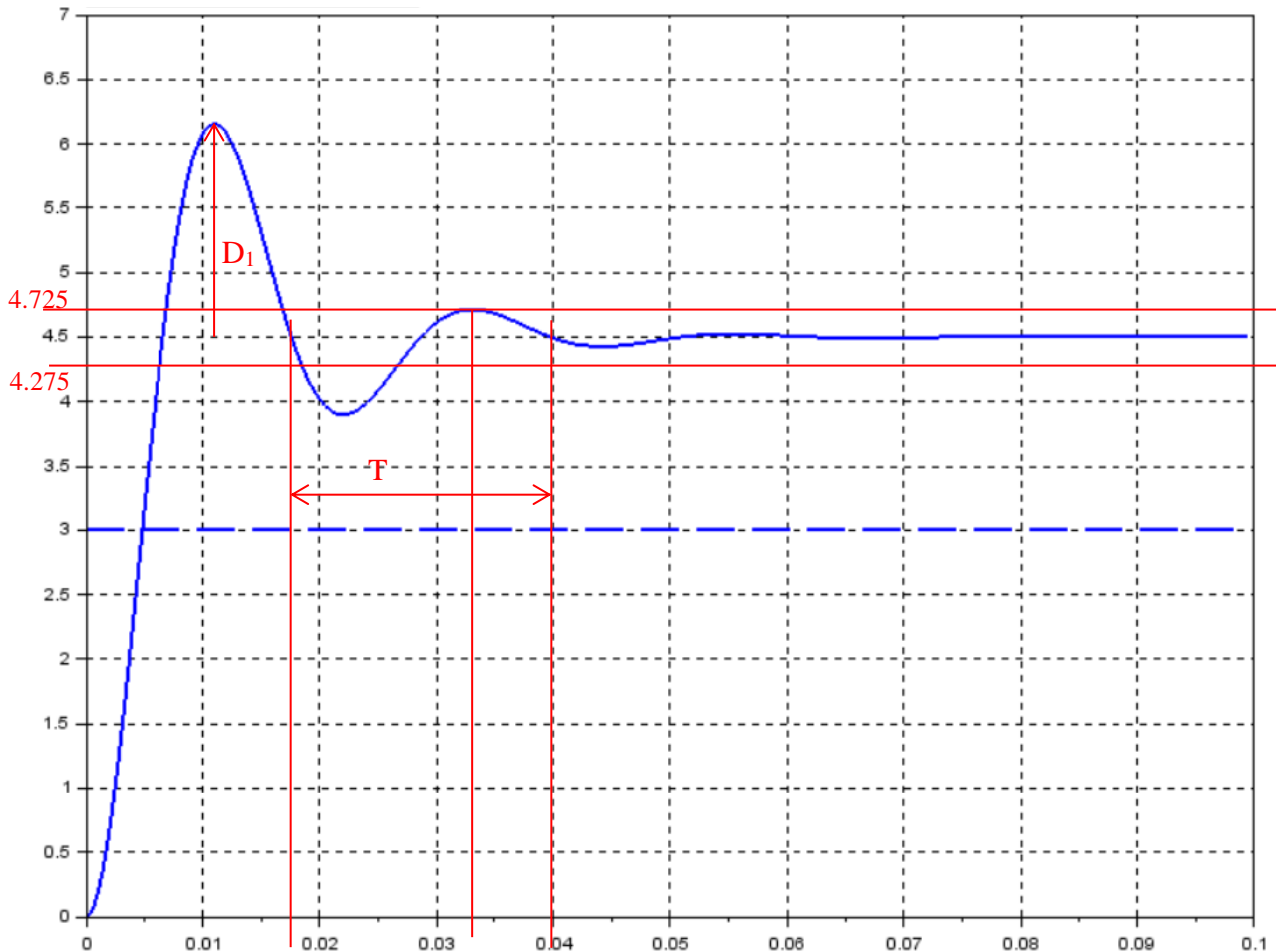
Exercice N°1 :

1)

- Erreur statique : $e(\infty) - s(\infty) = 3 - 4.5 = -1.5$
- Temps de réponse : bande à $\pm 5\%$ de V.A. = $\pm 0.225 \Rightarrow$ borne sup = 4.725 et borne inf = 4.275

On mesure $tr_{5\%} \approx 0.033$ s

- 1^{er} dépassement : $d_{1\%} \approx \frac{6.2-4.5}{4.5} * 100 \approx 37\%$



2)

La consigne est de type indicielle : échelon de 3

La réponse présente une tangente à l'origine nulle et des pseudo oscillations caractéristiques d'un système du

second ordre $\Rightarrow H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

- $K = \frac{s(\infty)}{e(\infty)} = \frac{4.5}{3} = 1.5$
- On utilise le 1^{er} dépassement ($d_{1\%} \approx 0.37$) et l'abaque donnant l'évolution des dépassements relatifs (on prend le 1^{er}) en fonction du coefficient d'amortissement. On trouve $\xi \approx 0.3$.

Autre solution, on utilise la formule: $d_{1\%} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ ce qui donne : $\xi = \frac{|\ln^2(d_{1\%})|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(d_{1\%})}} \approx 0.3$

- On utilise le temps de réponse ($tr_{5\%} \approx 0.033$ s) et l'abaque donnant le temps de réponse réduit ($\omega_0 \cdot tr_{5\%}$) en fonction du coefficient d'amortissement. On trouve $\omega_0 \cdot tr_{5\%} \approx$ entre 8 et 10. La détermination de ω_0 n'est pas précise. On voit sur la courbe de réponse qu'au niveau du 3^{ième} dépassement, la courbe tangente

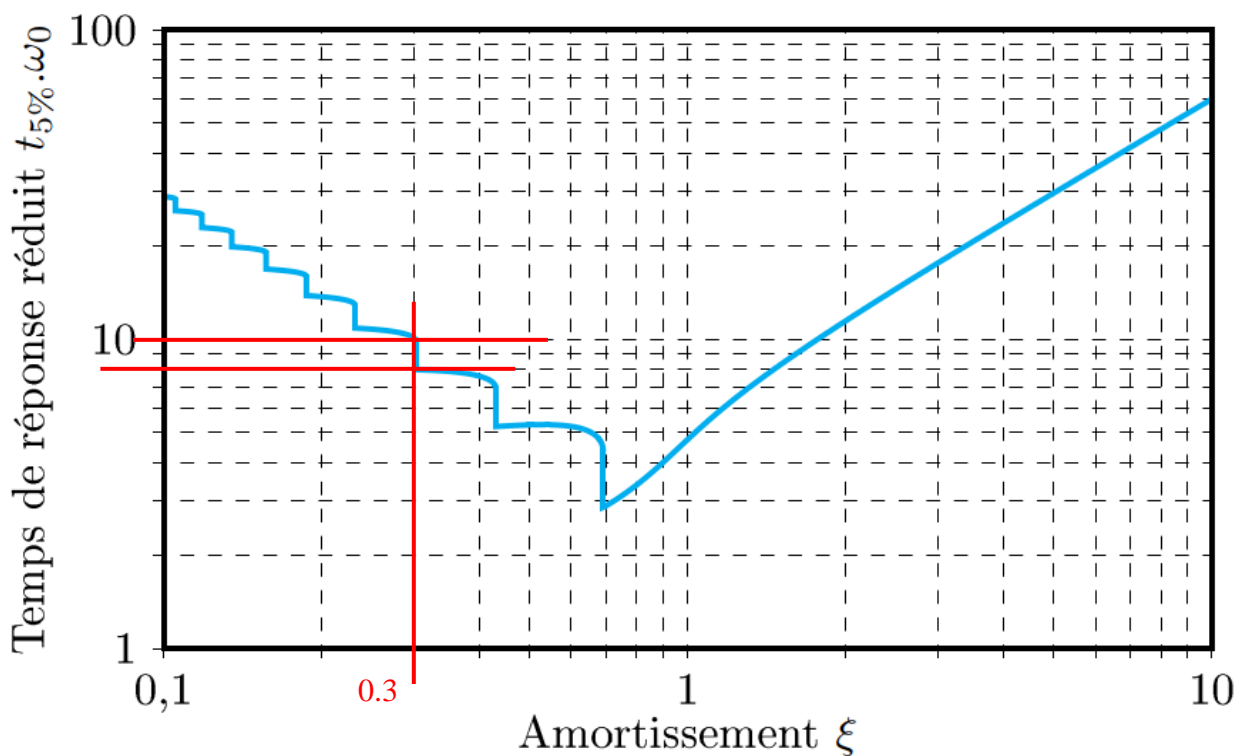
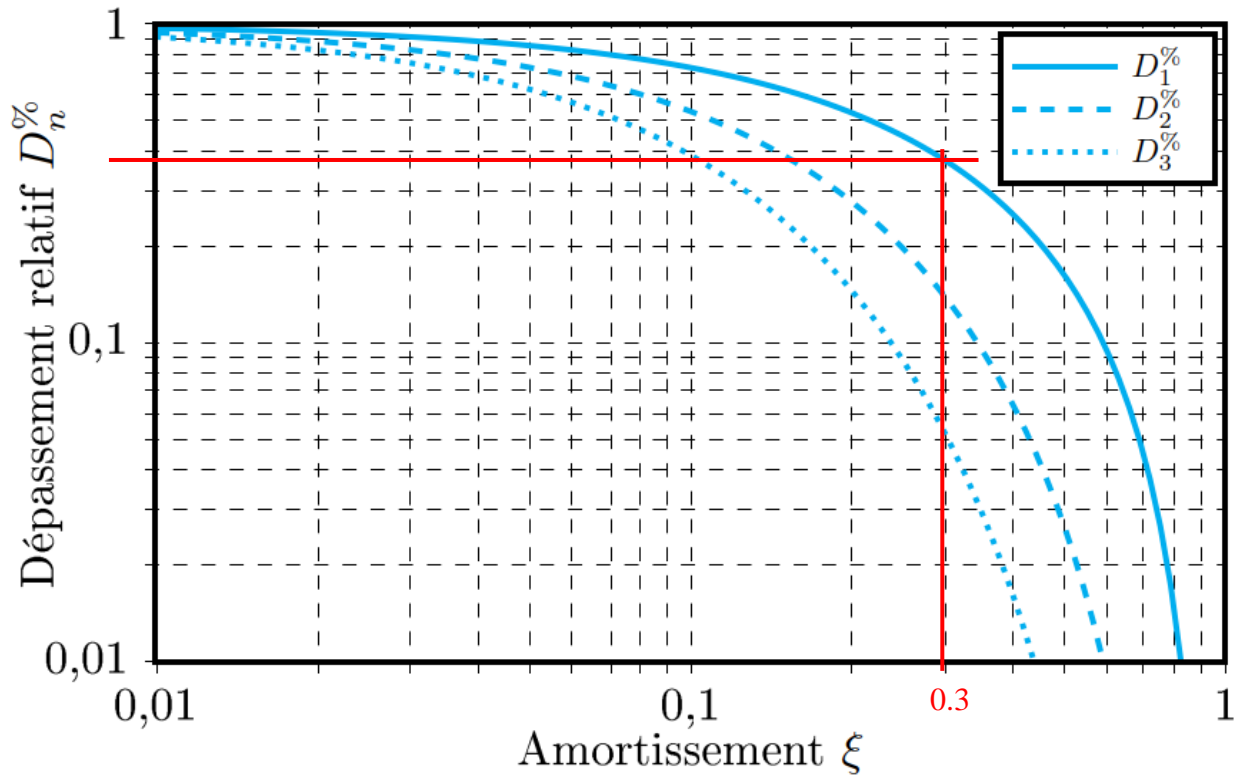
la borne sup de la bande à $\pm 5\%$ de la V.A. cela justifie la portion verticale de la courbe de l'abaque ($\omega_0 \cdot tr_{5\%} = f(\xi)$).

Mieux vaut utiliser l'expression de la pseudo période ($T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$) pour déterminer précisément ω_0 . On

mesure $T \approx 0.0225$ s. d'où : $\omega_0 \approx 293$ rad/s

D'où :

$$H(p) = \frac{1.5}{1 + \frac{2 \cdot 0.3}{293} p + \frac{1}{293^2} p^2}$$



Exercice N°2 :

$$Q1 : \overrightarrow{OA_1} = R\vec{x}$$

$$Q2 : \overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = (R-x)\vec{x} - y\vec{y} + (\lambda_1 - z)\vec{z}$$

$$Q3 : \overrightarrow{MB_1} = L\vec{x}_1 \quad \text{avec } \vec{x}_1 = \frac{\overrightarrow{MB_1}}{\|\overrightarrow{MB_1}\|} \text{ ce qui donne } \|\overrightarrow{MB_1}\|^2 = L^2 = (R-x)^2 + y^2 + (\lambda_1 - z)^2 \quad \text{d'où}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{L^2 - (R-x)^2 - y^2} + z$$

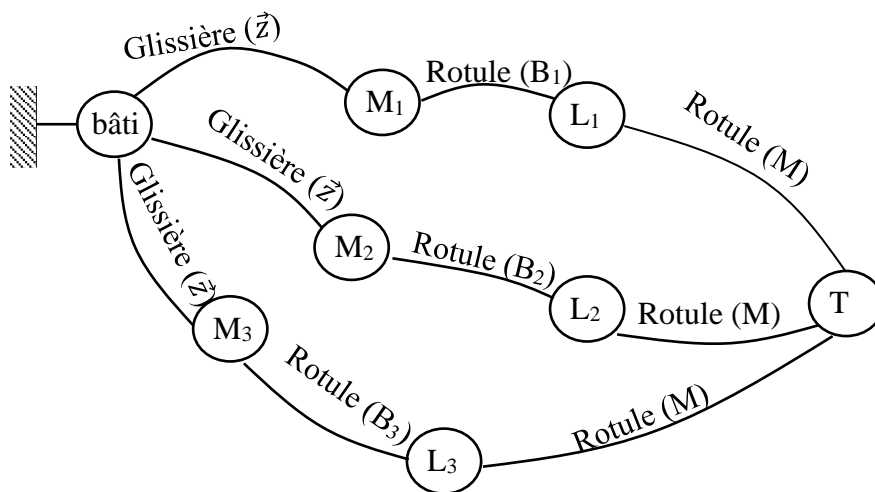
$$Q4 : \lambda_{1\text{ref}} = \sqrt{(0.7)^2 - (0.3)^2} \approx 0.63 \text{ m}$$

Q5 : cas limite : on est sur le bord du cylindre de travail :

- B₁ le plus bas : (x, y, z) = (-0.14, 0, 0) $\lambda_{1\text{min}} = 0.54 \text{ m}$
- B₁ le plus haut : (x, y, z) = (0.14, 0, 0.28) $\lambda_{1\text{max}} = 0.96 \text{ m}$

$$Q6 : \text{Course} = \lambda_{1\text{max}} - \lambda_{1\text{min}} = 42 \text{ cm} < 0.5 \text{ m} . \text{ choix constructeur OK.}$$

Q7 : les supports moteur translagent, donc glissières verticales. On voit sur le croquis 3D que suivant le point M, les barres doivent s'orienter de manière différente. Nécessité d'autoriser les rotations par rapport aux supports moteur et à la tête d'impression. Donc des rotules ou sphériques. On pourrait prévoir des rotules à doigt pour bloquer les rotations propres de chaque barre. Pas indispensable. En gardant ces rotations, on crée des mobilités internes qui n'affectent en rien les mouvements du mécanisme.

**Problème : Fauteuil dynamique de cinéma**

Q1,2 et 3 : La fermeture géométrique de la boucle OABC conduit à :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$$

$$e.\vec{x}_2 + l.\vec{y}_3 + d.\vec{x}_4 - a.\vec{x}_1 - b.\vec{y}_1 = \vec{0}$$

En posant $\theta_3 = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$, on obtient en projection dans la base 1 :

$$e.\begin{vmatrix} \cos\theta_r \\ \sin\theta_r \end{vmatrix} + l.\begin{vmatrix} -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \end{vmatrix} + d.\begin{vmatrix} \cos\theta_d \\ \sin\theta_d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \vec{0}$$

D'où on tire les deux équations scalaires :

$$1- \quad l.\sin\theta_3 = e.\cos\theta_r + d.\cos\theta_d - a$$

$$2- \quad -l.\cos\theta_3 = e.\sin\theta_r + d.\sin\theta_d - b$$

En effectuant $1^2 + 2^2$ pour éliminer θ_3 on obtient :

$$l^2 = (e \cdot \cos\theta_r + d \cdot \cos\theta_d - a)^2 + (e \cdot \sin\theta_r + d \cdot \sin\theta_d - b)^2$$

Après développement et regroupement des termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos\theta_d(-2a \cdot d + 2e \cdot d \cdot \cos\theta_r) + \sin\theta_d(-2b \cdot d + 2e \cdot d \cdot \sin\theta_r) \\ = -a^2 - b^2 - e^2 - d^2 + l^2 + 2a \cdot e \cdot \cos\theta_r + 2e \cdot b \cdot \sin\theta_r \end{aligned}$$

$$D = l^2 - a^2 - b^2 - e^2 - d^2 \quad A = -2a \cdot d \quad B = 2e \cdot d \quad C = -2b \cdot d \quad E = 2a \cdot e \quad F = 2e \cdot b$$

Q4 :

#recherche de x pour chaque y allant de -80 à 80

```
theta_d=[]
for i in range (-80,81):
    a=0
    b=-100
    c=(a+b)/2
    while abs(f(c,i))>=1e-4:
        if f(a,i)*f(c,i)<0:
            b=c
        else:
            a=c
        c=(a+b)/2
    theta_d.append(c)
```

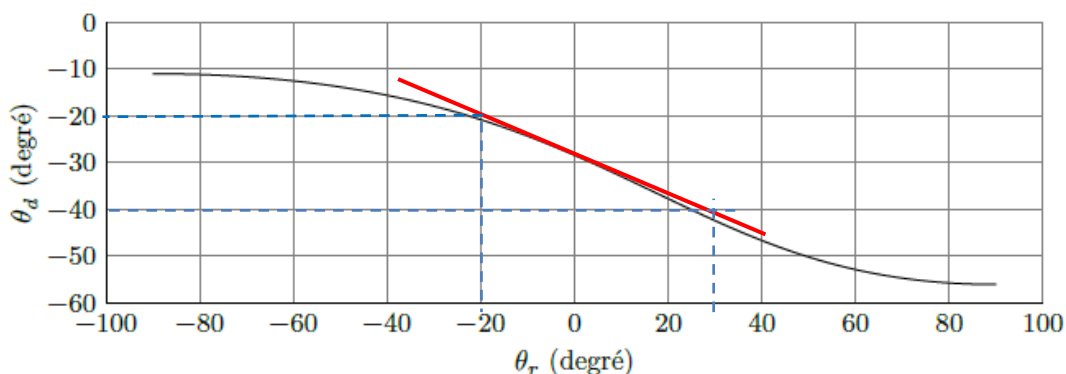
Q5 :

#par la méthode de newton avec dérivée numérique à 1 pas à droite

```
def deriv(f,h,x,i):
    y=(f(x+h,i)-f(x,i))/h
    return y

theta_d=[]
for i in range (-80,81):
    x2=0
    h=1
    while abs(f(x2,i))>=1e-4:
        x2=x2-f(x2,i)/deriv(f,h,x2,i)
    theta_d.append(x2)
```

Q6 : Linéarisation de la loi entrée-sortie



Le coefficient directeur de la tangente à la courbe à $\theta_r = 0^\circ$ donne la valeur de $K_C = \frac{-20}{50} = -\frac{2}{5}$

Q7 : Codeur : 250 points par tour $\Rightarrow c = \frac{N_{codeur}}{\theta} = \frac{250}{2\pi} = 39.8 \text{ rad}^{-1}$

Tachy : 5V pour 3000tr/min $\Rightarrow K_\Omega = \frac{U_\Omega}{\Omega} = \frac{5}{\frac{3000 \cdot 2\pi}{60}} = \frac{1}{20\pi} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ V/rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Q8 : Détermination de la valeur finale de la vitesse de rotation pour les modèles initial et simplifié.

Modèle initial : $H_I(p) = \frac{\Omega(p)}{I_C(p)} = \frac{1}{p}$ avec $I_C(p) = \frac{1}{p}$

Théorème de la valeur finale : $\Omega(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega(p) = \frac{K \cdot k_2 \cdot h}{k_2 \cdot h \cdot k_{ri} \cdot f} = \frac{K}{k_{ri} \cdot f}$

Modèle simplifié : $H_I(p) = \frac{\Omega(p)}{I_C(p)} = \frac{K}{k_{ri}} \cdot \frac{1}{J \cdot p + f}$ avec $I_C(p) = \frac{1}{p}$

Théorème de la valeur finale : $\Omega(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega(p) = \frac{K}{k_{ri} \cdot f}$

Q9 : même valeur finale entre les 2 modèles.

L'écart max de vitesse est de 0.09 rad/s au bout de 30 ms. Ecart en % = $0.09/40 = 0.2\%$

Q10 : Fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_\Omega(p)$

$$H_\Omega(p) = \frac{FT_{\text{Chaine directe}}}{1 + FT_{\text{Chaine directe}} * FT_{\text{Chaine retour}}} = \frac{C_\Omega(p) \cdot \frac{K}{K_{ri}} \cdot \frac{1}{Jp + f}}{1 + K_\Omega \cdot C_\Omega(p) \cdot \frac{K}{K_{ri}} \cdot \frac{1}{Jp + f}}$$

En remplaçant $C_\Omega(p)$ par son expression, il vient après calculs :

$$H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega}}{1 + \frac{K_{ri} \cdot f}{k_1 \cdot K \cdot K_\Omega} \cdot T_1 \cdot p \cdot \frac{J}{f} p + 1} = \frac{\frac{1}{K_\Omega} (1 + T_1 \cdot p)}{1 + \left(1 + \frac{K_{ri} \cdot f}{k_1 \cdot K \cdot K_\Omega}\right) \cdot T_1 \cdot p + \frac{K_{ri} \cdot J \cdot T_1}{k_1 \cdot K \cdot K_\Omega} \cdot p^2}$$

Q11 : Simplification de la fonction de transfert $H_\Omega(p)$

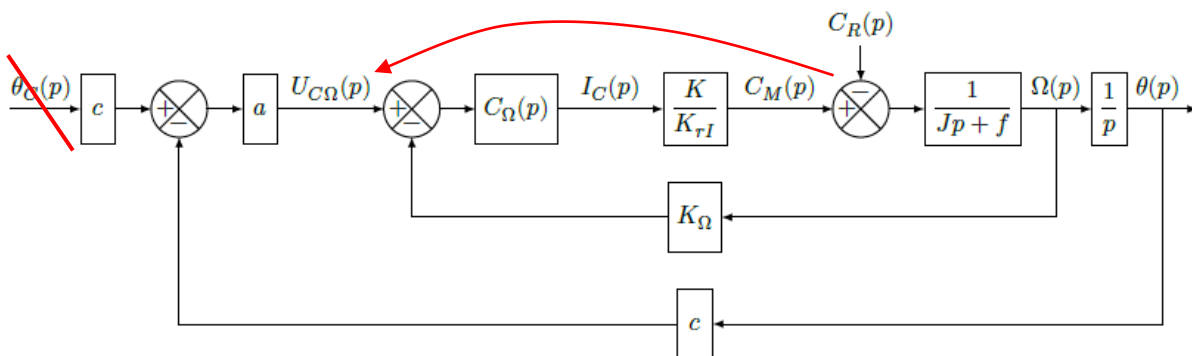
On donne $T_1 = \frac{J}{f}$, en remplaçant dans l'expression trouvée précédemment on obtient :

$$H_\Omega(p) = \frac{\frac{1}{K_\Omega}}{1 + \frac{K_{ri}}{k_1 \cdot K \cdot K_\Omega} J \cdot p} \quad \text{Donc par identification on trouve : } b = \frac{1}{K_\Omega} = 20 \cdot \pi = 62,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} / \text{V}$$

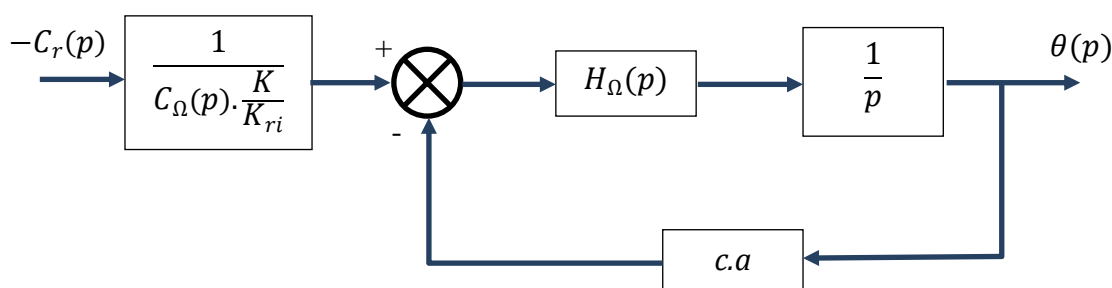
$$\tau = \frac{K_{ri}}{k_1 \cdot K \cdot K_\Omega} \cdot J = 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Q12 : Calcul de la fonction de transfert $\frac{\theta(p)}{C_r(p)}$

On effectue une transformation de schéma en déplaçant le comparateur de $C_r(p)$

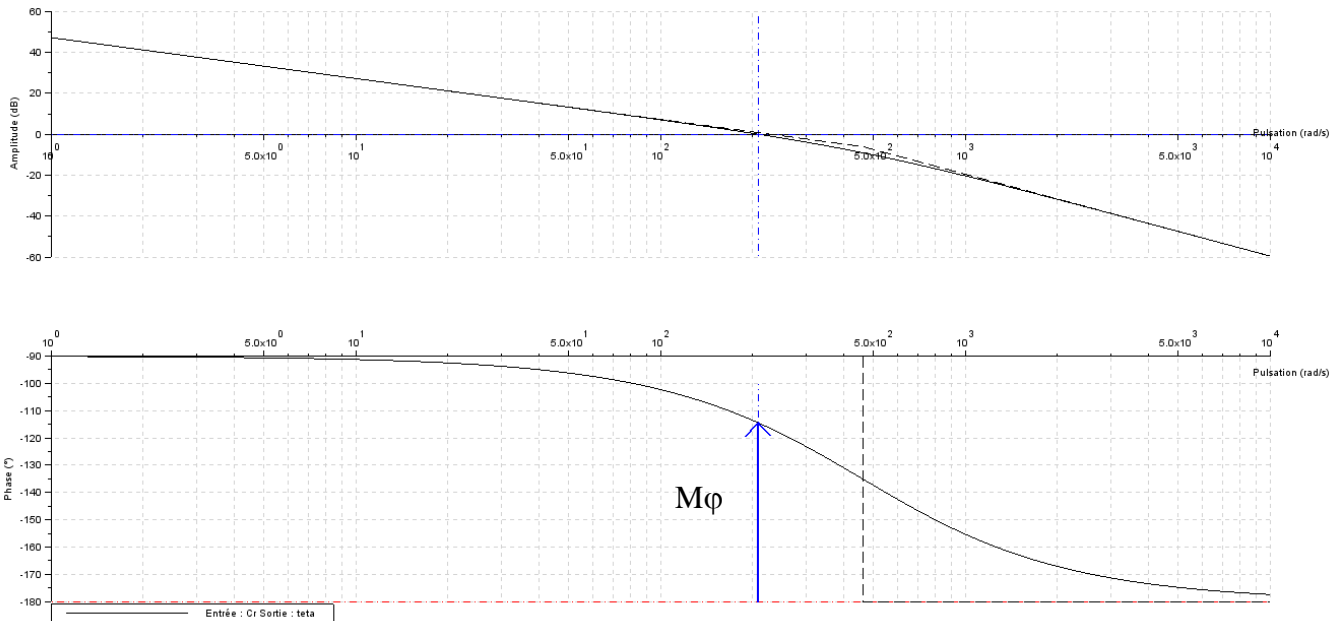


D'où la nouvelle structure de schéma bloc :



$$\frac{\theta(p)}{C_r(p)} = \frac{-1}{C_\Omega(p) \cdot \frac{K}{K_{ri}}} \cdot \frac{H_\Omega(p) \cdot \frac{1}{p}}{1 + c \cdot a \cdot H_\Omega(p) \cdot \frac{1}{p}} = \frac{-K_{ri} \cdot T_1 \cdot p}{K \cdot k_1 \cdot (1 + T_1 \cdot p)} \cdot \frac{\frac{b}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{bac}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}}$$

Q13 :



Marge phase = 65° . Marge de gain infinie ou indéfinie (la phase n'atteint jamais -180°)

Marges positives donc système stable. On peut évaluer sa précision.

Q14 : L'application du théorème de la valeur finale pour une entrée de type échelon donne :

$$\theta(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \theta(p) = p \cdot \frac{-K_{ri} \cdot T_1 \cdot p}{K \cdot k_1 \cdot (1 + T_1 \cdot p)} \cdot \frac{\frac{b}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{bac}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}} = 0$$

Le correcteur rend le système

précis c'est-à-dire insensible à une perturbation en échelon ici.

Q15 : Calcul de la fonction de transfert $\frac{\theta(p)}{\theta_c(p)}$

$$\frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = c \cdot \frac{\frac{a \cdot b}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}}{1 + \frac{a \cdot b \cdot c}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{(1 + \tau p)p + a \cdot b \cdot c} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a \cdot b \cdot c} p + \frac{\tau}{a \cdot b \cdot c} p^2}$$

Q16 : On peut exprimer le coefficient d'amortissement ξ à partir des paramètres a , b , c et τ .

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{\tau \cdot a \cdot b \cdot c}} = 0,7$$

Compte tenu des valeurs numériques fournies, on obtient $a = 9,2 \cdot 10^{-2} V$

Cette valeur du coefficient d'amortissement permet d'avoir le meilleur temps de réponse à 5% si on accepte le dépassement transitoire.

Q17 : Expression de l'écart de position : En posant $H_\theta(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}$ avec $H_{BO}(p) = \frac{abc}{p(1 + \tau p)}$

$$\mu(p) = \theta_c(p) - \theta(p) = (1 - H_\theta(p)) \cdot \theta_c(p) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{a \cdot b \cdot c} p + \frac{\tau}{a \cdot b \cdot c} p^2} \right) \cdot \theta_c(p)$$

Q18 :

Ecart pour une consigne de type échelon : $\mu_p(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mu(p) = 0$

Ecart pour une consigne de type rampe : $\mu_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mu(p) = \frac{1}{abc} = 4,31 \cdot 10^{-3} rad$

Ecart pour une consigne de type accélération : $\mu_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mu(p) = \infty$

Q19 :

- $\mu_p(\infty) = 0 < 1\%$ CDC OK
- $\mu_v(\infty) = 4,31 \cdot 10^{-3} rad = 14\%$ de la variation angulaire sur 30 ms = $0,03 \cdot 1 rad/s$ CDC PAS OK
- $\mu_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mu(p) = \infty$ CDC pas OK

Le système ne respecte pas le cahier des charges pour une consigne en accélération et en vitesse

Q20 :

$$\frac{p^2 \theta(p)}{p^2 \theta_c(p)} = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a \cdot b \cdot c} p + \frac{\tau}{a \cdot b \cdot c} p^2}$$

Ce qui donne $\omega_0 = \sqrt{a \cdot b \cdot c / \tau} = 325 rad/s$

Comme $\xi = 0.7$ le temps de réponse réduit vaut 3. (figure 16) $\Rightarrow tr_{5\%} = \frac{3}{\omega_0} = 9.2 ms$

Q21 : Pb pour la précision en accélération et la rapidité

Critères d'appréciation	Niveau
Précision statique de la boucle d'asservissement de position <ul style="list-style-type: none"> • Erreur statique de position • Erreur statique de trainage • Erreur statique d'accélération 	< 1% de la consigne angulaire OK = 14% de la variation angulaire sur 30 ms > 1% PAS OK > 3% PAS OK
Rapidité pour un échelon de consigne d'accélération <ul style="list-style-type: none"> • Temps de montée de 0 à 100% de la consigne • Dépassement • Temps de stabilisation à 5% 	< 5ms PAS OK (car $tr_{5\%} \approx$ temps de montée pour $\xi = 0.7$ et $tr_{5\%} \approx 10 ms$) < 20% OK (< 5% car $\xi = 0.7$) < 30 ms OK

Q22 :

$$\theta(p) = \frac{b}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p} (ac(\theta_c(p) - \theta(p) + dp\theta_c(p)))$$

Ce qui donne :

$$\frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = \frac{1 + \frac{db}{a \cdot b \cdot c} p}{1 + \frac{1}{a \cdot b \cdot c} p + \frac{\tau}{a \cdot b \cdot c} p^2}$$

Q23 : Expression de l'erreur

On note l'erreur en position $\mu(t) = \theta_c(t) - \theta(t)$.

D'où en intégrant le bloc c dans la chaîne directe :

$$\begin{aligned}\mu(p) &= \theta_c(p) - \theta(p) = \theta_c(p) - \left(c \cdot a \cdot \frac{b}{\tau p + 1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \mu(p) + dp \cdot \frac{b}{\tau p + 1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \theta_c(p) \right) \\ \mu(p) \cdot \left(1 + \frac{abc}{(\tau p + 1)p} \right) &= \theta_c(p) \cdot \left(1 - \frac{db}{\tau p + 1} \right) \\ \mu(p) &= \frac{(\tau p + 1 - db) \cdot p}{(\tau p + 1)p + abc} \cdot \theta_c(p)\end{aligned}$$

On en déduit les erreurs de position et de vitesse :

Erreur pour une consigne de type échelon : $\theta_c(p) = \frac{1}{p}$

$$\mu_p(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mu(p) = 0$$

Erreur pour une consigne de type rampe : $\theta_c(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\mu_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mu(p) = \frac{1 - db}{abc}$$

Q24 : Calcul de la valeur de d pour obtenir une erreur de trainage nulle :

On veut $\mu_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mu(p) = \frac{1 - db}{abc} = 0$

D'où : $d = \frac{1}{b} = 0.016 \text{ Vs}$

Q25 : Calcul de l'erreur en accélération

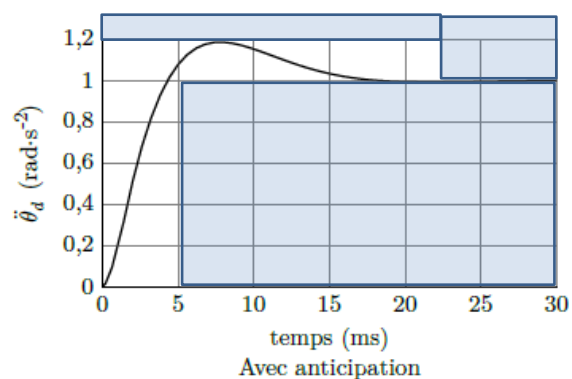
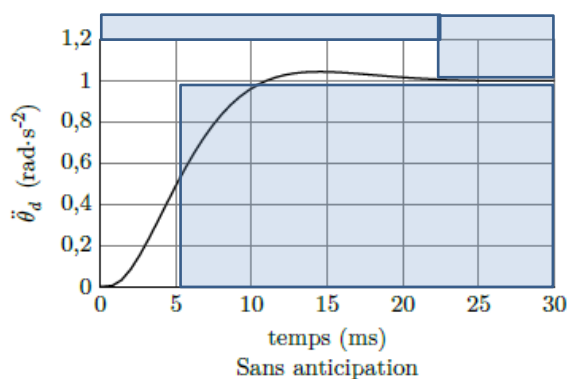
Erreur pour une consigne de type accélération : $\theta_c(p) = \frac{1}{p^3}$

$$\mu_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mu(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{(\tau p + 1 - db) \cdot p}{(\tau p + 1)p + abc} \cdot \frac{1}{p^3}$$

En prenant le résultat issu de la question précédente, on a $1 - db = 0$, donc :

$$\mu_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\tau p \cdot p}{(\tau p + 1)p + abc} \cdot \frac{1}{p^3} = \frac{\tau}{abc} = 9,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

variation d'angle sur 30 ms de $0.5 \cdot 0.03^2 = 45 \cdot 10^{-5}$. donc $\mu_a(\infty) = 2\% < 3\%$ CDC OK

Q26 : Respect du cahier des charges

Si on place les gabarits de la réponse attendue à partir des données du cahier des charges, on remarque que seule la réponse avec anticipation est conforme aux exigences.