MPSI

Programme de colle - semaine 14 du 13/01/2025 au 19/01/2025

1 Continuité

Pas de démonstration :

- Théorème des valeurs intermédiaires, différents énoncés (savoir expliquer la méthode de dichotomie)
- Fonction continue sur un segment : l'image est un segment ; traduction (la fonction est bornée et atteint ses bornes).
- Toute fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.
- Théorème de la bijection (ou corollaire du TVI).

2 Structures d'anneau et de corps

- Structure d'anneau : définition (selon le programme, tout anneau est unitaire), règles de calcul (en particulier, identités remarquables pour deux éléments qui commutent), anneau intègre, groupe des inversibles.
- Exemples d'anneaux à connaître : $\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ensemble des fonctions de I (partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, ensemble des suites réelles.
- Structure de corps (selon le programme, tout corps est commutatif). Tout corps est intègre. Exemples de corps à connaître : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Morphisme d'anneau, sous-anneau. La notion d'idéal n'est pas au programme en sup.

3 Le corps des réels et nombres particuliers

- Nombres décimaux. Approximations décimales d'un réel à 10^{-n} près.
  $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ (ce n'est pas un corps).
  Savoir exprimer une approximation décimale par défaut, par excès, à l'aide de la partie entière.
- Nombres rationnels et irrationnels. Entiers premiers entre eux (notion introduite uniquement pour parler de la forme irréductible d'un rationnel).
  $\sqrt{2}$ est irrationnel (*).
- Partie dense dans $\mathbb{R}$. La définition officielle est "une partie est dense ssi elle rencontre tout ouvert non vide". J'ai également donné la caractérisation :
  "A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow \exists a \in A \,/\, x < a < y$".
  Mais en pratique on n'utilise aucune des deux.
  Caractérisation séquentielle de la densité (*) : A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.
  $\mathbb{D}$ (*), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
- Caractérisation séquentielle de la borne supérieure : soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.
  -Si E est majorée, alors il existe une suite d'éléments de E qui converge vers $\sup(E)$.
  -Si E n'est majorée, alors il existe une suite d'éléments de E qui tend vers $+\infty$.

4 Exercices faits

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t$.
   Montrer que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
   Extension possible, non faite : montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $f(1) = 0$, alors $I_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. L'ensemble $\left\{a + b\sqrt{2} \,/\, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$ est noté $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

   a) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
   b) Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$
   c) Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un corps.

3. Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   Montrer que si $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

   a) *Cette question et la suivante peuvent être admises pour gagner du temps.*
      Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$.
   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x)$.
   c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx) = rf(x)$.
   d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
   e) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x$.