MPSI

Programme de colle - semaine 15 du 20/01/2025 au 26/01/2025

1 Dérivation

- Il y a beaucoup de choses à savoir, alors en démonstration, ne demander qu'un des points avec (*).
- Rappels : taux d'accroissement, tangente, dérivabilité en un point. Dérivabilité à gauche/droite, développement limité d'ordre 1 (son existence équivaut à la dérivabilité). Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité, réciproque fausse.
- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, multiplication par un scalaire, produit (*), inverse, composition (*) ; réciproque d'une bijection.
- Extremum global, local (définitions). Extremum $\Rightarrow$ point critique (à l'intérieur de l'intervalle de définition).
- Théorème de Rolle, théorème (ou égalité) des accroissements finis (* en admettant le théorème de Rolle).
  Théorème de la limite de la dérivée (* en admettant le TAF).
  Fonction lipschitzienne. Définition.
  Lipschitzienne $\Rightarrow$ continue, réciproque fausse.
  Inégalité des accroissements finis (*).
- Variations de fonctions : caractérisation des fonctions croissantes (* le sens utilisant le TAF).
  Caractérisation des fonctions strictement croissantes.
- Dérivées successives. Formule de Leibniz (*).
- **Nous n'avons pas encore fait d'exercice sur l'utilisation de l'IAF dans l'étude des suites récurrentes.**
- Fonction à valeurs complexes (aucun exercice fait) : dérivabilité, IAF (les théorèmes de Rolle et des AF ne s'appliquent pas).

2 Exercices

1. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(1-x^2) \end{array}$ *Possibilité de changer la fonction.*

   a) Montrer que f est dérivable sur $]0,\sqrt{2}[$ et calculer f' sur cet intervalle.

   b) Étudier la dérivabilité de f en 0.

   c) Bonus : En déduire un équivalent simple de $\arccos(1-y)$ quand y tend vers 0 à droite.

2. **CCINP exo 4**

   a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

   b) Soit $f\ :\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et soit $x_0\in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

   c) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Rightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.

3. Donner la dérivée n^{e} de $f\ :\ x\longmapsto x^2e^{2x}$ (variante possible).

4. Au choix :

a) Donner l'ensemble de dérivabilité d'une fonction f donnée (variante : montrer que f est dérivable sur ...), avec au moins une étude de dérivabilité ponctuelle.

b) Montrer une inégalité à partir du TAF ou de l'IAF.

c) Une limite à trouver, en utilisant le DL_1 ou un taux d'accroissement.