MPSI

Programme de colle - semaine 16 du 27/01/2025 au 02/02/2025

1 Convexité

Définitions et propriétés à illustrer par des dessins. Ça doit rester très simple (dire quelle propriété appliquer, et à quelle fonction). **Aucune démonstration.**

- Fonction convexe / concave sur un intervalle I.
- Caractérisation par la croissance des pentes.
- Si f est dérivable : f est convexe ssi f' est croissante.
- Pour une fonction convexe, la courbe est au-dessus des tangentes.
- Inégalité de Jensen : si f est convexe, alors $\forall n \geqslant 2$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ de somme 1, $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

2 Suites numériques

- Exercices sur les suites récurrentes, de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ (f : fonction d'une variable réelle).
- La seule propriété au programme : si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.
- Les exercices doivent être guidés.

3 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- **Aucun exercice fait, uniquement des questions de cours.** Les démonstrations adaptées sont marquées d'un (*).
- Divisibilité. Division euclidienne (énoncé à connaître).
- PGCD de deux entiers naturels a, b avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Algorithme d'Euclide (savoir l'expliquer), relation de Bézout. Extension du PGCD à $\mathbb{Z}^2$.
  Équivalence entre $(d|a \quad \text{et} \quad d|b)$ et $d|a \wedge b$ (*).
  Commutativité, associativité, $\forall a, b, k \in \mathbb{N}$, $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$.
- Couple d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout (*).
  Lemme de Gauss (si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a|c$) et propriété sans nom (si $a|c$, $b|c$ et $a \wedge b = 1$, alors $ab|c$) (ces 2 propriétés *).
- **PAS ENCORE VU :** PPCM, Généralisation à n entiers ($n \geqslant 3$), nombres premiers, décomposition, valuation p-adique, petit théorème de Fermat.
  Les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne sont pas au programme en MPSI.

4 Exercices faits

1. *Prototype d'exercice utilisant les principales techniques à connaître.*
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
   a) Montrer qu'elle est bien définie sur $\mathbb{N}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   c) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

2. *Prototype d'exercice utilisant l'inégalité des accroissements finis.*
   On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos u_n$.
   a) Montrer que la fonction cos a un unique point fixe $\alpha \in [0, 1]$.
   b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}|u_n - \alpha|$

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. Que peut-on en déduire ?

3. **Inégalités obtenues à partir de la convexité** (questions indépendantes).

   a) Comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n réels strictement positifs (utiliser la concavité de ln).

   b) Soit p, q des réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

   Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+}$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

   On pourra utiliser la concavité de ln.

   c) Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$ et illustrer.