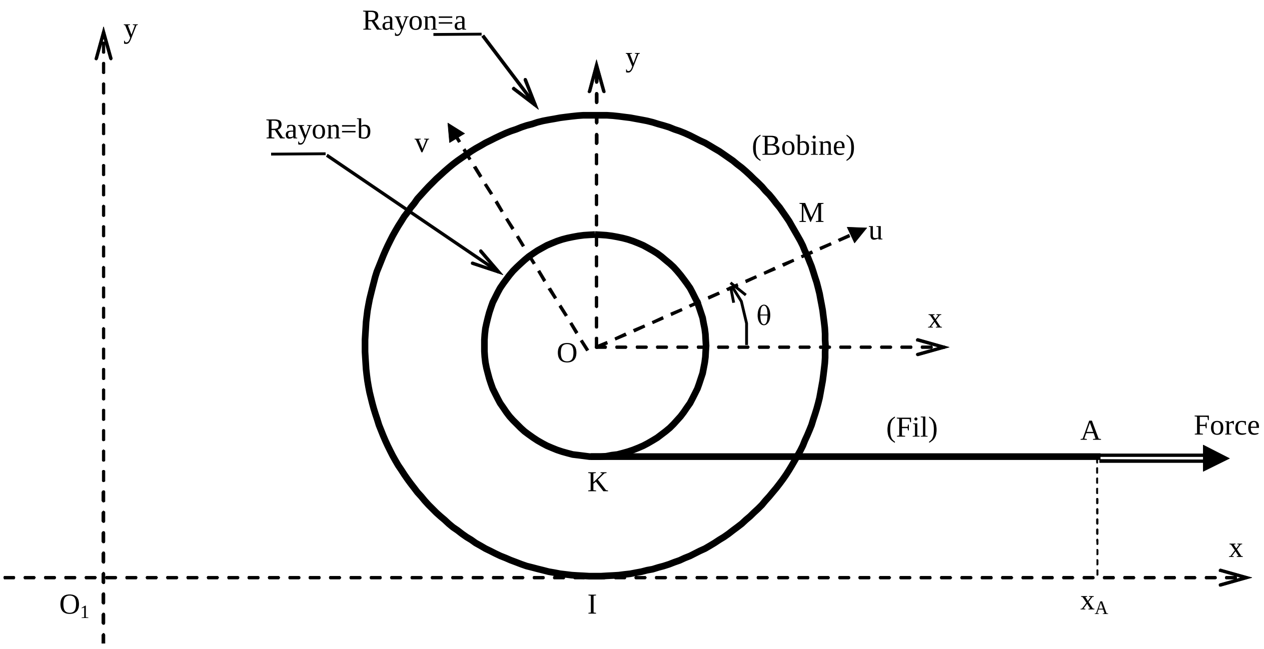
Exercice : Bobine de fil



Soit une bobine de fil (B) représentée par la figure ci-jointe dans son plan de symétrie (O, $\vec{x},\vec{y}$). On désigne par a le rayon du grand cylindre de la bobine et par b le rayon du petit cylindre sur lequel est entouré un fil (F) inextensible.
Le contact de la bobine avec le plan horizontal (O_1, $\vec{x},\vec{z}$) a lieu avec frottement. On exerce sur le fil (F) une force suivant $\vec{x}$. On suppose dans tout le problème que l'enroulement ou le déroulement du fil sur la bobine ainsi que le roulement de (B) sur le plan (O_1, $\vec{x},\vec{z}$) s'effectuent sans glissement.

On désigne par $R_s(O_1, \vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le référentiel galiléen lié au sol. On désigne par R(O, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$) le référentiel lié au centre de la bobine. On désigne par $R_b(O, \vec{u},\vec{v},\vec{z})$ le référentiel lié à la bobine,

avec $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$, M étant un point de la bobine.

L'abscisse du point O de la bobine dans le référentiel galiléen lié au sol est $x_O\,(t)$.

$\theta_{(t)}$ est l'angle ($O\vec{x},\overrightarrow{OM}$) repérant la rotation de la bobine.

Question 1 : *En utilisant la composition des vecteurs vitesses appelée loi de distribution des vitesses, explicitez la condition de roulement sans glissement de la bobine sur le plan (O_1, $\vec{x},\vec{z}$) :*
$\overrightarrow{V(I \in bobine/sol)} = \vec{0}$ *et déduisez en la relation liant* $\dot{x}_o$ *et* $\dot{\theta}$.

Question 2 : *Ecrivez au point de contact K la relation qui exprime l'enroulement ou le déroulement sans glissement du fil sur la bobine. En déduire la relation liant* $\dot{x}_o$, $\dot{x}_A$ *et* $\dot{\theta}$ *où A est le point d'application de la force F et* $x_A\,(t)$ *son abscisse dans le référentiel lié au sol .Donner alors la relation entre* $\dot{x}_A$ *et* $\dot{x}_o$.

Corrigé

Q1 :

$$\overrightarrow{V(I \in bobine/sol)} = \vec{0} = \overrightarrow{V(I \in R_b / R_s)} = \overrightarrow{V(I \in R_b / R\ )} + \overrightarrow{V(I \in R\ / R_s)}$$

$$\overrightarrow{V(I \in R_b / R\ )} + \overrightarrow{V(I \in R\ / R_s)} = \overrightarrow{V(O \in R_b / R\ )} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_b/R}} + \overrightarrow{V(O \in R / R_s)} + \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R/R_s}}$$

$$= \vec{0} + a\vec{y} \wedge \dot{\theta}\vec{z} + \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt_{/R_s}} + \overrightarrow{IO} \wedge \vec{0} = a\,\dot{\theta}\vec{x} + \dot{x}_o\,\vec{x} = \vec{0}$$

D'où $\dot{x}_o = -a\,\dot{\theta}$

Q2 :

$$\overrightarrow{V(K \in fil/bobine)} = \vec{0} = \overrightarrow{V(K \in F / R_s)} - \overrightarrow{V(K \in R_b / R\ )} - \overrightarrow{V(K \in R\ / R_s)}$$

$$= \overrightarrow{V(A \in F / R_s)} + \overrightarrow{KA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{F/R_s}} - \overrightarrow{V(O \in R_b / R\ )} - \overrightarrow{KO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_b/R}} - \overrightarrow{V(O \in R / R_s)} - \overrightarrow{KO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R/R_s}}$$

$$= \dot{x}_A\vec{x} + \overrightarrow{KA} \wedge \vec{0} + \vec{0} - b\vec{y} \wedge \dot{\theta}\vec{z} - \dot{x}_o\vec{x} - \overrightarrow{KO} \wedge \vec{0} = \vec{0}$$

ce qui donne $\dot{x}_A - \dot{x}_O - b\dot{\theta} = 0$ *d'où* $\dot{x}_A = \dot{x}_O\left(\dfrac{a-b}{a}\right)$