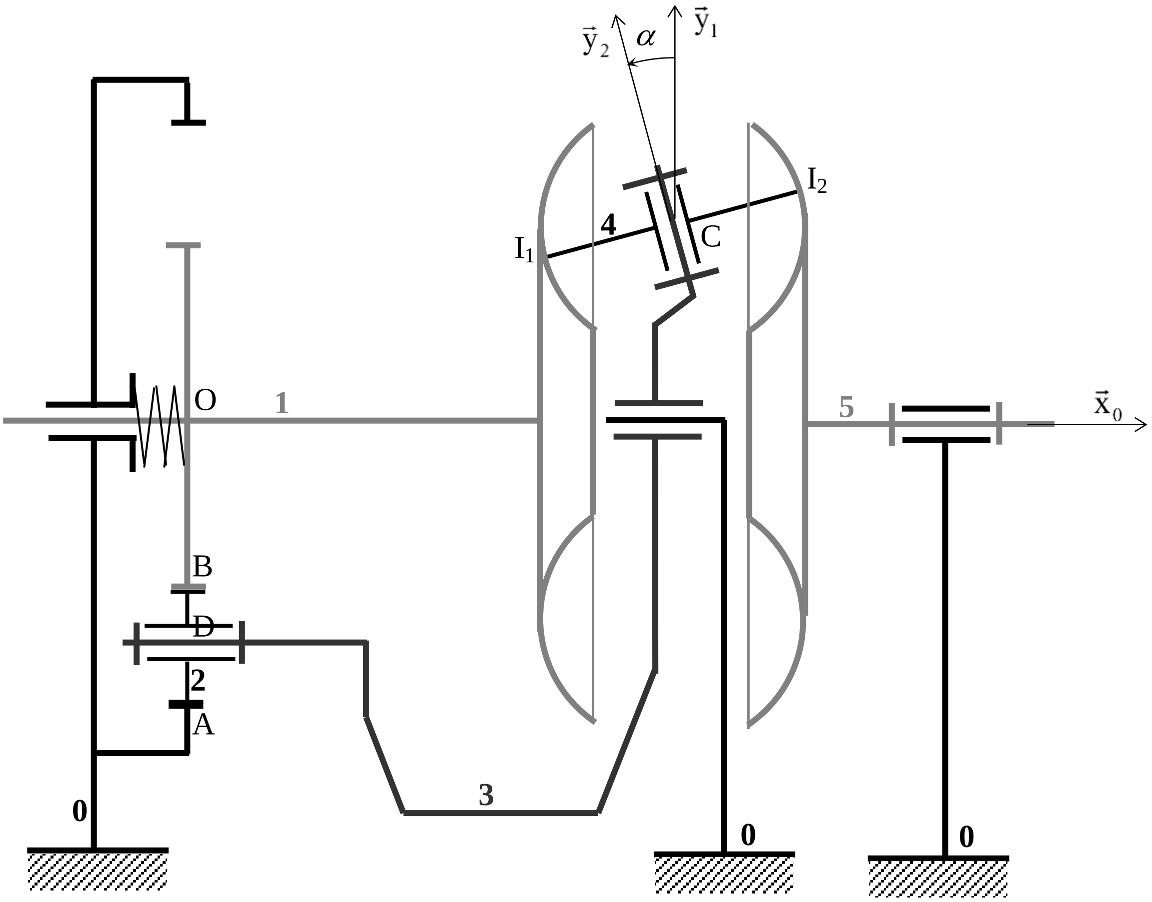
Exercice : Variateur Patin

Le variateur Patin schématisé ci-dessous dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1)$ est constitué de deux sous-ensembles :

- un train épicycloïdal {**0**, **1**, **2**, **3**} (visualiser l'animation « train épi »)
- un variateur continu à galet {**3**, **4**, **1**, **5**, **0**} (visualiser l'animation « variateur galet »)



L'arbre d'entrée **1**, l'arbre de sortie **5** et le porte-satellite **3** sont en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti **0**. Le satellite **2**, en liaison pivot avec le porte-satellite **3**, engrène avec le pignon **1** et la couronne liée au bâti **0**. Le galet orientable **4** est en liaison pivot d'axe $(C, \vec{y}_2)$ avec le porte-satellite **3**. Ce galet roule sans glisser en I_1 et en I_2 sur deux surfaces toriques liées à **1** et **5**.

On note :

$\vec{\Omega}(1/0) = \omega_1 \vec{x}_0$, $\vec{\Omega}(5/0) = \omega_5 \vec{x}_0$, $\vec{\Omega}(3/0) = \omega_3 \vec{x}_0$,

$\vec{\Omega}(2/3) = \omega_{23} \vec{x}_0$, $\vec{\Omega}(4/3) = \omega_{43} \vec{y}_2$, $\vec{\Omega}(2/0) = \omega_2 \vec{x}_0$

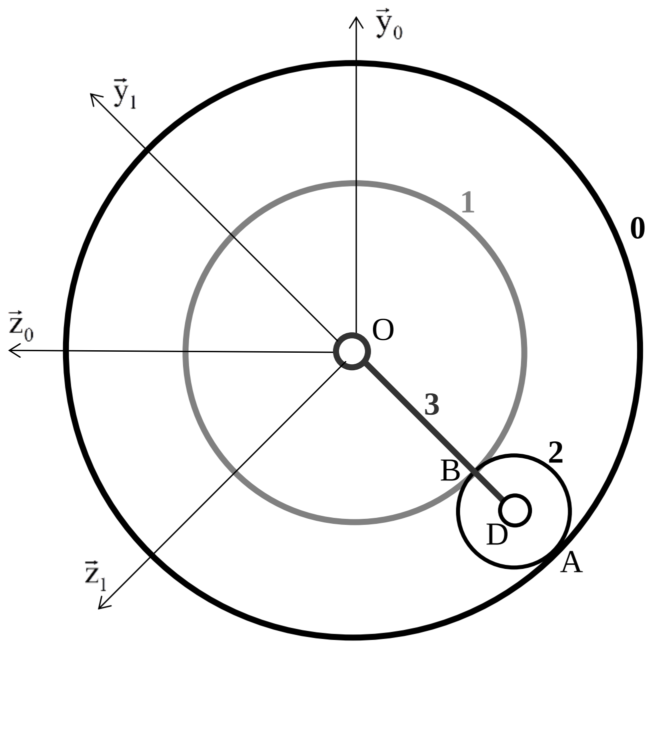
r = rayon du galet **4** = $I_1C = I_2C$

$\overrightarrow{OC} \cdot \vec{y}_1 = l$ avec $l > r$

d_2 = diamètre de **2** = AB

R_0 = rayon de la couronne de **0** = OA

$(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \alpha$ = angle de réglage supposé fixe dans cette étude.



Questions et travail demandé :

1 – Représenter le graphe de structure de ce mécanisme.

Etude du train épicycloïdal :

2 – Exprimer les torseurs $\mathcal{V}(1/0)$, $\mathcal{V}(2/3)$ et $\mathcal{V}(3/0)$.

3 – En utilisant la condition de non glissement en A, déterminer la relation entre ω_2, ω_3, d_2 et R_0.

4 - En utilisant la condition de non glissement en B, déterminer la relation entre ω_2, ω_3, ω_1, d_2 et R_0.

5 – En déduire le rapport de réduction du train épicycloïdal ω_3/ω_1.

Etude du variateur à galet :

6 - Exprimer les torseurs $\mathcal{V}(4/3)$ et $\mathcal{V}(5/0)$.

7 - En utilisant la condition de non glissement en I_1, déterminer la relation entre ω_{43}, ω_3, ω_1, l, r et α.

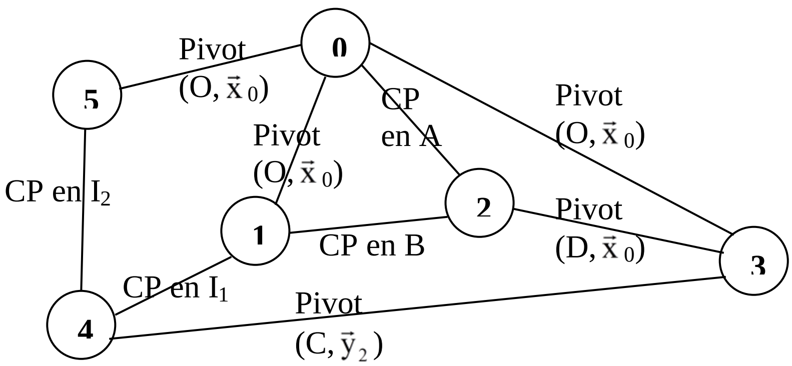
8 - En utilisant la condition de non glissement en I_2, déterminer la relation entre ω_5, ω_3, ω_{43}, l, r et α.

Synthèse :

9 – En utilisant les relations obtenues précédemment, déterminer le rapport de réduction ω_5/ω_1 de ce mécanisme en fonction de r, R_0, l, d_2 et α.

Variateur Patin (éléments de correction)

1 - Graphe de structure :



2 - Mouvement de 1/0 : rotation d'axe $Ox_0 \Rightarrow \mathcal{V}(1/0) = {}_O\begin{Bmatrix} \omega_1\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Mouvement de 2/3 : rotation d'axe $Dx_0 \Rightarrow \mathcal{V}(2/3) = {}_D\begin{Bmatrix} \omega_{23}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Mouvement de 3/ 0 : rotation d'axe $Ox_0 \Rightarrow \mathcal{V}(3/0) = {}_O\begin{Bmatrix} \omega_3\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

3- Condition de roulement sans glissement en A entre le satellite 2 et 0 : $\vec{V}(A\in 2/0) = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\vec{V}(A\in 2/0) = \vec{V}(A\in 2/3) + \vec{V}(A\in 3/0) &= \vec{V}(D\in 2/3) + \overrightarrow{AD}\wedge\vec{\Omega}(2/3) + \vec{V}(O\in 3/0) + \overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}(3/0) \\
&= \vec{0} + \frac{d_2}{2}\,\vec{y}_1\wedge\omega_{23}\,\vec{x}_0 + \vec{0} + R_0\,\vec{y}_1\wedge\omega_3\,\vec{x}_0 \\
&= -\frac{d_2}{2}(\omega_2 - \omega_3)\,\vec{z}_1 - R_0\,\omega_3\,\vec{z}_1
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{(R_0 - \frac{d_2}{2})\omega_3 + \frac{d_2}{2}\omega_2 = 0}$ (1)

4- Condition de roulement sans glissement en B entre le satellite 2 et 1 : $\vec{V}(B\in 2/1) = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\vec{V}(B\in 2/1) &= \vec{V}(B\in 2/3) + \vec{V}(B\in 3/0) - \vec{V}(B\in 1/0) \\
&= \vec{V}(D\in 2/3) + \overrightarrow{BD}\wedge\vec{\Omega}(2/3) + \vec{V}(O\in 3/0) + \overrightarrow{BO}\wedge\vec{\Omega}(3/0) - \vec{V}(O\in 1/0) - \overrightarrow{BO}\wedge\vec{\Omega}(1/0) \\
&= \vec{0} - \frac{d_2}{2}\,\vec{y}_1\wedge(\omega_2 - \omega_3)\,\vec{x}_0 + \vec{0} + (R_0 - d_2)\,\vec{y}_1\wedge\omega_3\,\vec{x}_0 - \vec{0} - (R_0 - d_2)\,\vec{y}_1\wedge\omega_1\,\vec{x}_0
\end{aligned}$$

d'où $\frac{d_2}{2}(\omega_2 - \omega_3) - (R_0 - d_2)(\omega_3 - \omega_1) = 0$ soit $\boxed{(R_0 - d_2)\,\omega_1 + \frac{d_2}{2}\,\omega_2 - (R_0 - \frac{d_2}{2})\,\omega_3 = 0}$ (2)

5 – En combinant les deux expressions (1) et (2) : $\boxed{\dfrac{\omega_3}{\omega_1} = \dfrac{R_0 - d_2}{2R_0 - d_2}}$ (3)

6 - Mouvement de 4/3 : rotation d'axe $Cy_2 \Rightarrow \mathcal{V}(4/3) = {}_{C}\begin{Bmatrix} \omega_{43}\vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Mouvement de 5/0 : rotation d'axe $Ox_0 \Rightarrow \mathcal{V}(5/0) = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_5\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

7 - Condition de roulement sans glissement en I_1 entre le galet 4 et 1 : $\vec{V}(I_1 \in 4/1) = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\vec{V}(I_1 \in 4/1) &= \vec{V}(I_1 \in 4/3) + \vec{V}(I_1 \in 3/0) - \vec{V}(I_1 \in 1/0) \\
&= \vec{V}(C \in 4/3) + \overrightarrow{I_1C} \wedge \vec{\Omega}(4/3) + \vec{V}(O \in 3/0) + \overrightarrow{I_1O} \wedge \vec{\Omega}(3/0) - \vec{V}(O \in 1/0) - \overrightarrow{I_1O} \wedge \vec{\Omega}(1/0) \\
&= \vec{0} + r\,\vec{x}_2 \wedge \omega_{43}\,\vec{y}_2 + \vec{0} + (r\,\vec{x}_2 - l\,\vec{y}_1 - L\,\vec{x}_0)\ \vec{y}_1 \wedge (\omega_3 - \omega_1)\,\vec{x}_0
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{r\omega_{43} + (l - r\sin\alpha)(\omega_3 - \omega_1) = 0}$ (4)

8 - Condition de roulement sans glissement en I_2 entre le galet 4 et 5 : $\vec{V}(I_2 \in 4/5) = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
\vec{V}(I_2 \in 4/5) &= \vec{V}(I_2 \in 4/3) + \vec{V}(I_2 \in 3/0) - \vec{V}(I_2 \in 5/0) \\
&= \vec{V}(C \in 4/3) + \overrightarrow{I_2C} \wedge \vec{\Omega}(4/3) + \vec{V}(O \in 3/0) + \overrightarrow{I_2O} \wedge \vec{\Omega}(3/0) - \vec{V}(O \in 5/0) - \overrightarrow{I_2O} \wedge \vec{\Omega}(5/0) \\
&= \vec{0} - r\,\vec{x}_2 \wedge \omega_{43}\,\vec{y}_2 + \vec{0} + (-r\,\vec{x}_2 - l\,\vec{y}_1 - L\,\vec{x}_0)\ \vec{y}_1 \wedge (\omega_3 - \omega_5)\,\vec{x}_0
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{r\omega_{43} + (l + r\sin\alpha)(\omega_5 - \omega_3) = 0}$ (5)

9 – de (4) et (5): $(l - r\sin\alpha)(\omega_3 - \omega_1) = (l + r\sin\alpha)(\omega_5 - \omega_3)$
en remplaçant ω_3 par sa valeur en fonction de ω_1 tirée de (3) :

$$\boxed{\frac{\omega_5}{\omega_1} = \frac{1}{l + r\sin\alpha}\left(r\sin\alpha - \frac{l\,d_2}{2R_0 - d_2}\right)}$$