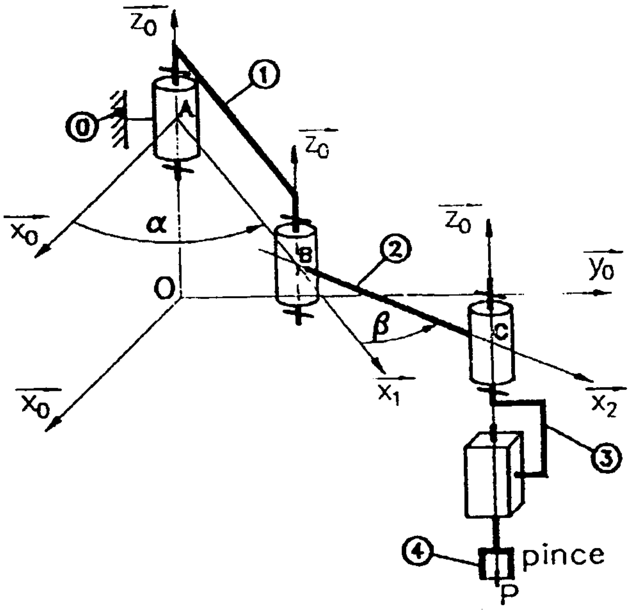
Exercice : Bras manipulateur

L'étude porte sur un manipulateur à structure bi-cylindrique dite aussi horizontale car les rotations donnent aux bras des mouvements dans un plan horizontal. Le poignet se réduit à un axe de rotation parallèle aux autres et une translation suivant cet axe situé après la rotation.

La structure du bras est la suivante :

- Un socle ou bâti modélisé par le solide (0)
- Un bras modélisé par le solide (1)
- Un avant-bras modélisé par le solide (2)
- Un poignet modélisé par le solide (3)
- Une pince modélisée par le solide (4)



On définit :

- $(R_0):(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié (0)
- $(R_1):(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ lié (1)
- $(R_2):(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ lié (2)

On pose :

- $\alpha(t)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$ orienté par $\vec{z}_0$
- $\beta(t)=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ orienté par $\vec{z}_0$
- $\overrightarrow{OA}=a.\vec{z}_0$ avec $a=cste$
- $\overrightarrow{AB}=r.\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{BC}=r.\vec{x}_2$ avec $r=cste$
- $\overrightarrow{CP}=h(t).\vec{z}_0$ avec $h(t)<0$

Travail demandé :

1. *Déterminer les vecteurs vitesse suivants :*

Nota : *On exprimera les résultats sous leur* ***<u>forme la plus simple</u>****.*

- $\overrightarrow{V_{P\in 4/2}}$, $\overrightarrow{V_{P\in 4/1}}$ *et* $\overrightarrow{V_{P\in 4/0}}$ *par dérivation du vecteur position.*
- $\overrightarrow{V_{C\in 2/0}}$ *par dérivation du vecteur position*
- $\overrightarrow{V_{C\in 2/0}}$ *en utilisant exclusivement la composition des vecteurs vitesse et la formule de changement de point d'un torseur.*

2. *Déterminer les vecteurs accélérations suivants :* $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 4/2}}$ *et* $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 4/1}}$.

On souhaite donner au point C une <u>trajectoire rectiligne</u> tel qu'il décrive un segment DE. On pose :

- $\overrightarrow{AD}=2r.\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{AE}=2r.\vec{y}_0$
- $\overrightarrow{AC}=X(t).\vec{x}_0+Y(t).\vec{y}_0=\lambda(t).\vec{u}$
- $\theta=(\vec{x}_0,\vec{u})$

3. *Après avoir tracer une figure claire du plan* $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$*, exprimer les relations suivantes :*
   - *Exprimer X puis Y en fonction de* λ *et* θ
   - *Donner la relation liant* α, β *et* θ.
   - *Donner la relation liant r, X et Y sachant que le point C décrit le segment DE*
   - *Exprimer* λ *en fonction de r,* α *et* θ *(relation indépendante des précédentes)*

4. *En déduire* α *et* β *en fonction de* θ.
5. ***Application numérique*** *: recopier et remplir le tableau suivant sur votre feuille de copie :*

θ (rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
α (rad)					
α (deg)					
β (rad)					
β (deg)					

Faire une figure précise du plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ afin d'illustrer les résultats numériques précédents (et de les vérifier).

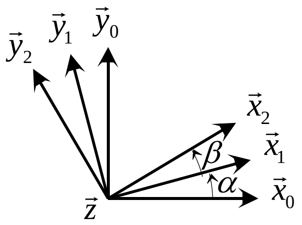
Corrigé

Q1 - $\vec{V}(P,4/2)$ *par dérivation du vecteur position*

$$\vec{V}(P,4/2)=\left(\frac{d\overrightarrow{CP}}{dt}\right)_{R_2} \quad \textit{avec } \overrightarrow{CP}=h(t)\vec{z}_0 \textit{ et } \left(\frac{d\ h(t)\vec{z}_0}{dt}\right)_{R_2}=\dot{h}(t)\vec{z}_0 \textit{ car } \vec{z}_0 \textit{ est fixe dans } R_2.$$

$$\underline{\vec{V}(P,4/2)=\dot{h}(t).\vec{z}_0}$$

- $\vec{V}(P,4/1)$ *par dérivation du vecteur position*



$$\vec{V}(P,4/1)=\left(\frac{d\overrightarrow{BP}}{dt}\right)_{R_1} \quad \textit{or } \overrightarrow{BP}=r\vec{x}_2+h(t)\vec{z}_0$$

$$\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_{R_1}=\cancel{\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_{R_2}}+\vec{\Omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{x}_2=\dot{\beta}\vec{z}_0\wedge\vec{x}_2=\dot{\beta}\vec{y}_2$$

$$\left(\frac{d\ h(t)\vec{z}_0}{dt}\right)_{R_1}=\dot{h}(t)\vec{z}_0 \quad \textit{donc : } \underline{\vec{V}(P,4/1)=\dot{h}(t).\vec{z}_0+r.\dot{\beta}.\vec{y}_2}$$

- $\vec{V}(P,4/0)$ *par dérivation du vecteur position*

$$\vec{V}(P,4/0)=\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_0} \quad \textit{or } \overrightarrow{OP}=a\vec{z}_0+r\vec{x}_1+r\vec{x}_2+h(t)\vec{z}_0$$

$$\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0}=\cancel{\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_1}}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{x}_1=\dot{\alpha}\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1=\dot{\alpha}\vec{y}_1$$

$$\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_{R_0}=\cancel{\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_{R_2}}+\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{x}_2=\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\vec{z}_0\wedge\vec{x}_2=\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\vec{y}_2$$

$$\left(\frac{d\ h(t)\vec{z}_0}{dt}\right)_{R_0}=\dot{h}(t)\vec{z}_0 \quad \textit{donc : } \underline{\vec{V}(P,4/0)=\dot{h}(t).\vec{z}_0+r.\dot{\alpha}.\vec{y}_1+r.\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\vec{y}_2}$$

- $\vec{V}(C,2/0)$ *par dérivation du vecteur position*

$$\vec{V}(C,2/0)=\left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right)_{R_0} \quad \textit{or } \overrightarrow{OC}=a\vec{z}_0+r\vec{x}_1+r\vec{x}_2$$

$$\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0}=\cancel{\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_1}}+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{x}_1=\dot{\alpha}\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1=\dot{\alpha}\vec{y}_1$$

$$\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_{R_0}=\cancel{\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_{R_2}}+\vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{x}_2=\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\vec{z}_0\wedge\vec{x}_2=\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\vec{y}_2$$

donc : $\underline{\vec{V}\left(C,2/0\right)=r.\dot{\alpha}.\vec{y}_1+r.\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\vec{y}_2}$

- $\vec{V}\left(C,2/0\right)$ *par composition des vitesses et changement de point*

$\vec{V}\left(C,2/0\right)=\vec{V}\left(B,2/0\right)+\overrightarrow{CB}\wedge\vec{\Omega}(2/0)$ *et* $\overrightarrow{CB}\wedge\vec{\Omega}(2/0)=-r\vec{x}_2\wedge(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{z}_0=r(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{y}_2$

$\vec{V}\left(B,2/0\right)=\cancel{\vec{V}\left(B,2/1\right)}+\vec{V}\left(B,1/0\right)$

$\vec{V}\left(B,1/0\right)=\cancel{\vec{V}\left(A,1/0\right)}+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}(1/0)$ *et* $\overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}(1/0)=-r\vec{x}_1\wedge\dot{\alpha}\vec{z}_0=r\dot{\alpha}\vec{y}_1$

donc : $\vec{V}\left(C,2/0\right)=r.\dot{\alpha}.\vec{y}_1+r.\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\vec{y}_2$

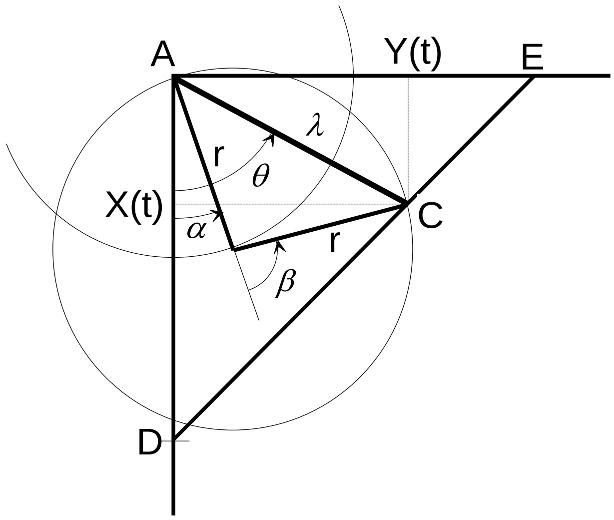
Q2 $\vec{\Gamma}\left(P,4/2\right)=\left(\dfrac{d(\vec{V}\left(P,4/2\right))}{dt}\right)_{R_2}=\left(\dfrac{d\left(\dot{h}.\vec{z}_0\right)}{dt}\right)_{R_2}=\ddot{h}.\vec{z}_0$ *car* $\vec{z}_0$ *est fixe dans* R_2 .

$\vec{\Gamma}\left(P,4/1\right)=\left(\dfrac{d(\vec{V}\left(P,4/1\right))}{dt}\right)_{R_1}$ *avec* $\underline{\vec{V}\left(P,4/1\right)=\dot{h}(t).\vec{z}_0+r.\dot{\beta}.\vec{y}_2}$

et donc : $\underline{\vec{\Gamma}\left(P,4/1\right)=\ddot{h}.\vec{z}_0+r.\ddot{\beta}.\vec{y}_2-r.\dot{\beta}^2.\vec{x}_2}$

Q3

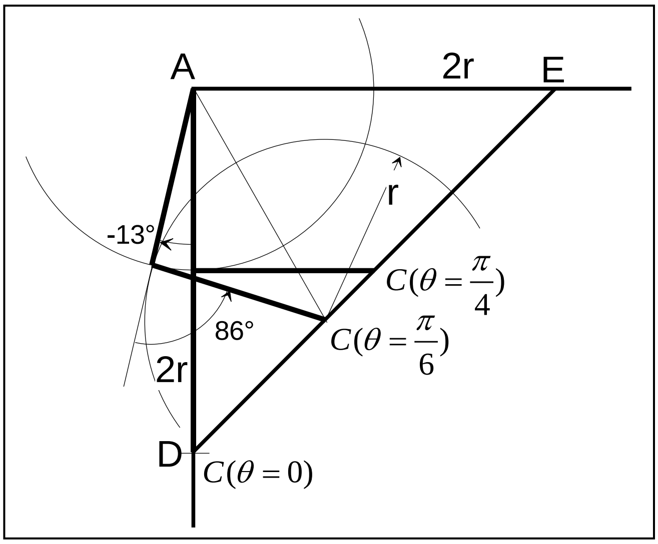
$$\boxed{\begin{aligned}&X=\lambda.\cos\theta\\&Y=\lambda.\sin\theta\\&\theta=\alpha+\beta/2\\&X+Y=2.r\\&\lambda=2.r.\cos(\theta-\alpha)\end{aligned}}$$



Q4 $\underline{\alpha=\theta-\text{Arccos}\left[\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right]}$; $\underline{\beta=2\text{Arccos}\left[\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right]}$

Q5

θ (rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
α (rad)	0	-0.22	0	0.29	1.57
α (deg)	0	-13°	0°	17°	90°
β (rad)	0	1.5	1.57	1.5	0
β (deg)	0°	86°	90°	86°	0°



A
2r
E
r
-13°
$C(\theta = \frac{\pi}{4})$
86°
$C(\theta = \frac{\pi}{6})$
2r
D
$C(\theta = 0)$